Résolution des équations du second degré :

Équation du second degré : $ax^2+bx+c=0$.
Le discriminant (delta) : $\Delta = b^2-4ac$.

- ☐ Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- ☐ Si $\Delta=0$, il y a une seule solution : $x_1=\frac{-b}{2a}$.
- ☐ Si $\Delta<0$, il n'y a pas de solution.

Tableau de signe de ax^2+bx+c :

-Si $\Delta>0$ et $a>0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		+	ϕ	-	ϕ	+	

-Si $\Delta>0$ et $a<0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		-	ϕ	+	ϕ	-	

-Si $\Delta=0$ et $a>0$:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		+	ϕ	+	

-Si $\Delta=0$ et $a<0$:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		-	ϕ	-	

-Si $\Delta<0$ et $a>0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		+	

-Si $\Delta<0$ et $a<0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		-	

Tableau de signe de $ax+b$:

-Si $a>0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		-	ϕ	+	

-Si $a<0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		+	ϕ	-	

Fonction logarithme :

- ☐ La fonction $\ln(x)$ est définie sur $]0;+\infty[$.
- ☐ On a $\ln(1)=0$ et $\ln(e)=1$.
- ☐ $f(x)=\ln(u(x))$ a pour dérivée $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

  -Si $g(x)=\ln(2x^2-3x)$ a pour dérivé $g'(x)=\dfrac{4x-3}{2x^2-3x}$.
- ☐ Si a et b sont deux réels positifs, alors :

  $\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$; $\ln(\frac{a}{b})=\ln(a)-\ln(b)$;
  $\ln(\frac{1}{a})=\ln(1)-\ln(a)=-\ln(a)$;
  $\ln(a^n)=n\times\ln(a)$ et $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$.
- ☐ Pour tout x positif, $\ln(e^x)=x$.
  -En particulier, $\ln(e^3)=3$ et $\ln(e^5)=5$.

Fonction exponentielle :

- ☐ La fonction e^x est définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ On a $e^0=1$ et $e^{\ln(1)}=1$.
- ☐ $f(x)=e^{u(x)}$ a pour dérivée $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.
- ☐ $f(x)=u'(x)e^{u(x)}$ a pour primitive $F(x)=e^{u(x)}$.
- ☐ Si a et b sont deux réels , alors :

  $e^a\times e^b=e^{a+b}$, $\dfrac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$, $\dfrac{1}{e^a}=e^{-a}$,

  $(e^a)^n=e^{a\times n}$ et $\sqrt{e^a}=e^{\frac{a}{2}}$.
- ☐ Pour tout x positif, $e^{\ln(x)}=x$.
  En particulier, $e^{\ln(2)}=2$ et $e^{\ln(7)}=7$.

Dérivées de quelques fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée	Ensemble
$f(x)=a$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$
$f(x)=\ln(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

Primitive de quelques fonctions usuelles :

Fonction	Primitive	Ensemble
$f(x)=a$	$f'(x)=ax$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$f'(x)=\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=\frac{x^3}{3}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=\ln(x)$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

Équation de la tangente :

Si f est dérivable en a, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point a est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Opération sur les dérivées :

$(u\times v)'=u'v+uv'$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

$(ku)'=ku'$ (k est une constante) , $(u+v)'=u'+v'$.

Primitive et intégrale :

- ☐ Si f est continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I. F est une primitive de f sur I si : $F'(x)=f(x)$.
- ☐ Puisque $F'(x)=f(x)$, alors le signe de $f(x)$ donne les variations de F.
- ☐ Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.
- ☐ La valeur moyenne de f sur $[a;b]$: $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Convexité :

- f est convexe (resp. concave) lorsque sa courbe est au-dessus (resp. en dessous) de toutes ses tangentes.
- Si $f''(x)>0$, f' est strict. croissante et f convexe.
- Si $f''(x)<0$, f' est strict. décroissante et f concave.
- Si $f''(x)=0$ et change de signe en un point a, alors la courbe de la fonction f admet un point d'inflexion. au point de coordonnées $(a; f(a))$.

Suites arithmétiques :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. On a alors :
$u_{n+1} = u_n + r \quad et \quad u_n = u_0 + nr$.

- Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il suffit de montrer que $u_{n+1} - u_n$ est égale à une constante.
- Somme des n premiers termes :
  $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$.
- Cas particulier : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Suites géométriques :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0. On a alors : $v_{n+1} = q \times v_n \quad et \quad v_n = v_0 \times q^n$.

- Pour montrer qu'une suite (v_n) est géométrique, il suffit de montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est égale à une constante.
- Somme des n premiers termes :
  si $q \neq 0$, $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Limite d'une suite géométrique :

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $q > 0$. Sa limite est égale à :

- 0 si $-1 < q < 1$;
- $+\infty$ si $q > 1$ et $v_0 > 0$;
- $-\infty$ si $q > 1$ et $v_0 < 0$.

Suites arithmético-géométriques :

Si (u_n) est une suite arithmético-géométrique alors :

$$u_{n+1} = au_n + b \text{ , où } a \text{ et } b \neq 0 \text{ (non nuls).}$$

Généralités sur les probabilités :

- En général, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
  $P(\bar{A}) = 1 - P(A), \quad P(\Omega) = 1 \quad \text{et} \quad P(\emptyset) = 0$.
- Si A et B incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Probabilité conditionnelle :

- $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, si $P(B) \neq 0$.
- $P(A \cap B) = P_B(A)P(B)$.
- Si A et B sont indépendants, $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

Loi discrète : loi binomiale

- Épreuve de Bernoulli : une expérience aléatoire ayant deux issues.
- Schéma de Bernoulli : répétition identique et indépendante d'une épreuve de Bernoulli.
- Si X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$, la probabilité d'avoir k succès parmi n épreuves est égale à :
  $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- L'espérance de X est égale à $E(X) = n \times p$.
- La variance de X est égale à $V(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Fonction densité :

- Une densité sur $[a; b]$ est une fonction f définie, continue et positive sur $[a; b]$ telle que : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Loi continue : loi uniforme

- La densité d'une loi uniforme sur $[a; b]$ est donnée par : $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

  Pour tout intervalle $[c; d]$ inclus dans $[a; b]$: $P([c; d]) = \displaystyle\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{d-c}{b-a}$.
- L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme est : $\dfrac{a+b}{2}$.

Loi continue : loi normale

- Densité de la loi normale $\mathscr{N}(0; 1)$: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Si X suit une loi $\mathscr{N}(\mu; \sigma)$, alors $U = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0; 1)$.
- Si X suit une loi $\mathscr{N}(\mu; \sigma)$, alors :
  $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx O,68$;
  $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx O,95$;
  $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx O,99$.
- Si X suit une loi $\mathscr{N}(0; 1)$, alors :
  $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx O,95$.

Intervalle de fluctuation et de confiance à 95%

- Intervalle de fluctuation :
  p est la fréquence théorique d'une variable qualitative dans une population et n la taille d'un échantillon.
  Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, un intervalle de fluctuation de niveau 95% de la fréquence observée dans l'échantillon est :
  $IF = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$.
- Intervalle de confiance :
  f est la fréquence observée d'une variable qualitative dans un échantillon de taille n représentatif de la population.
  Si $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$, un intervalle de confiance de niveau 95% de la fréquence théorique dans la population est : $IC = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$.