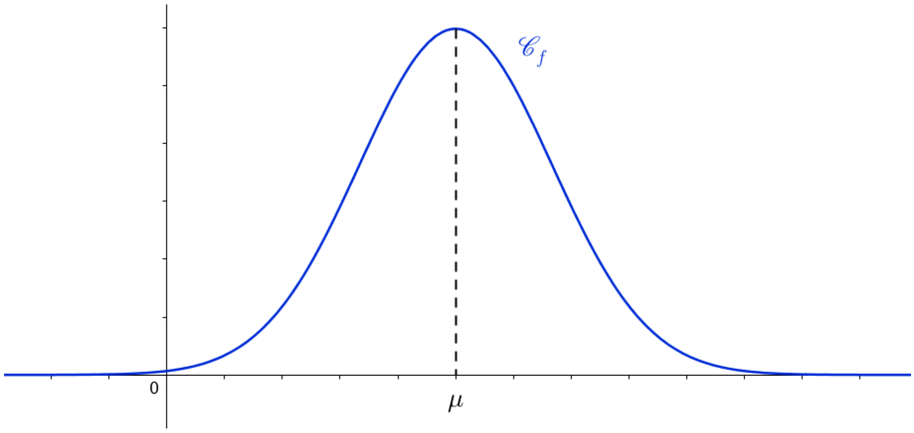
La loi normale

1- Définition

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
Lorsque n devient "grand" et si $np > 5$, le diagramme en bâton représentant la loi binomiale X_n de paramètre n et p "se rapproche" d'une courbe ayant la forme d'une cloche. On dit alors que la loi suit une loi normale.

Les paramètres de cette loi sont :
- Espérance : $\mu = np$
- Écart-type : $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$



La courbe de la fonction densité d'une variable qui suit une loi $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma)$.

2- Propriété

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi normale, pour tout réel k, la probabilité $P(X \leq k)$ est l'aire de la surface comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et à gauche de la droite d'équation $x = k$.

3- Propriété

Soit X une variable aléatoire quivant une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
- L'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1.
- $P(x = k) = 0$, pour tout réel k ;
- $P(X \leqslant \mu) = \dfrac{1}{2}$;
- $P(X \leqslant k) = 1 - P(X > k)$;
- $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$;
- $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) = 0,95$.

4- Propriétés

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$.
On a (avec la calculatrice) alors :
- $P(X \in [\mu - \sigma\ ;\ \mu + \sigma]) = 0,68$;
- $P(X \in [\mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma]) = 0,95$;
- $P(X \in [\mu - 3\sigma\ ;\ \mu + 3\sigma]) = 0,997$.