Dérivation

1 - Fonction dérivée

Définition 1 :

Soit f une fonction dérivable en tout point d'un intervalle I.
La fonction dérivée de f, notée f', est la fonction qui, à tout nombre x de l'intervalle I, associe le nombre $f'(x)$.

Propriétés 1 :

Le tableau ci-dessous rassemble les formules usuelles des dérivées.

Fonction	**Dérivée**	**Domaine de définition**
$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b, \quad a$ et $b \in \mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, \ n \in \mathbb{Z}^\star$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 1, \quad \mathbb{R}^\star$ si $n \leq 1,$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^\star$

Propriétés 2 :

Soit $U(x)$ et $V(x)$ deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.

Remarque : Par soucis de concision, on notera tout simplement U et V au lieu de $U(x)$ et $V(x)$.

- Dérivée de la somme :
La fonction $U + V$ est dérivable sur I et on a : $(U + V)' = U' + V'$.

- Dérivée du produit par un réel :
La fonction $k \times U$ est dérivable sur I et on a : $(k \times U)' = k \times U'$.

- Dérivée du produit :
La fonction $U \times V$ est dérivable sur I et on a : $(U \times V)' = U'V + UV'$.

- Dérivée du quotient :
Si V est non nul sur l'intervalle I, alors $\dfrac{U}{V}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = -\dfrac{UV' - UV'}{V^2}$.

2 - Dérivée et sens de variations

On suppose que la fonction f est dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.

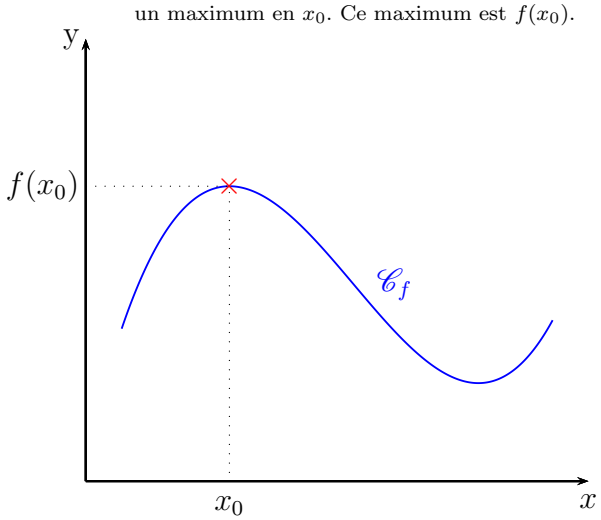
3 - Dérivée et extremums

Théorème

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I. Soit J un intervalle ouvert inclus dans I et $x_0 \in J$.

a) Si la fonction f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
b) Si la fonction dérivée f' s'annule en x_0, en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0.

Sur le graphique ci-dessous, la fonction f admet un maximum en x_0. Ce maximum est $f(x_0)$.



4 - Équation de la tangente

Propriétés 1 :

a) Si f est dérivable en a, alors sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet au point $A(a\,;\,f(a))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$.

b) L'équation réduite de la tangente en $A(a\,;\,f(a))$ est donnée par : $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.