Loi binomiale

I- Schéma de Bernoulli

1- Épreuve de Bernoulli

Définition

On appelle épreuve de Bernoulli, une expérience aléatoire ayant deux issues.

Exercice d'application 1 :

Une urne contient dix boules : 7 noirs et 3 rouges. Les boules sont indiscernables au toucher.
L'expérience consiste à tirer une boule au hasard et observer sa couleur. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Réponse :

Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli. En effet, il y a deux issues possible lorsqu'on tire une boule :

— A : "la boule choisit est de couleur noire";

— B : "la boule choisit est de couleur rouge";

Étant donné qu'on cherche la probabilité de tirer une boule rouge, on dit qu'il y a "Succès" lorsque l'événement B se réalise. Et par opposition, pour l'événement A, on parle d'"échec". On a alors $P(B) = \dfrac{3}{10} = 0,3$

2- La loi de Bernoulli

Définition

On appelle loi de Bernoulli de paramètre p, la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à p.
On peut résumer cette loi de probabilité dans le tableau ci-dessous.

Issue	Succès	Échec
Probabilité	p	$1-p$

3- Schéma de Bernoulli

Définition

On appelle schéma de Bernoulli, la répétition d'une même épreuve de Bernoulli dans des conditions d'indépendances.
Dans ce cas, l'issue d'une épreuve ne dépend pas de celles des épreuves précédentes.

Exercice d'application 2 :

Dans une classe de Première, il y a 12 garçons et 15 filles.
Le professeur choisit au hasard la fiche d'un élève.

1. Associer une épreuve de Bernoulli à cette situation (ou expérience).
2. Déterminer la loi de probabilité associée à cette épreuve.
3. Le professeur choisit au hasard la fiche d'un élève et puis, sans la remettre en place, en choisit une seconde.
   (a) Peut-on associer un schéma de Bernoulli à cette situation ?
   (b) Construire l'arbre pondéré lié à cette situation.

Exercice d'application 3 :

Lors d'un match de basket, un joueur est confronté trois fois à l'épreuve du lancer franc. On suppose que ses lancers sont indépendants.
On sais que ce joueur réussit en moyenne quatre lancers sur cinq.

1. Associer un schéma de Bernoulli à cette situation.
2. Construire l'arbre pondéré lié à l'énoncé.

II- Loi binomiale

1- Définition

Un schéma de Bernoulli est constitué de n épreuves pour lesquelles la probabilité de succès est égales à p. Soit X, la variable aléatoire qui compte le nombre de succès lors des n épreuves.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.

Remarque : On notera $\mathscr{B}(n, p)$ la loi binomiale de paramètres n et p.

Exercice d'application 4 :

On lance deux fois de suite, de façon indépendante, une roue partagée en quatre secteurs de tailles identiques. Les quatre secteurs portent les couleurs suivantes : rouge, vert, bleu et blanc.
Soit X, la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la roue s'arrête sur le secteur rouge.

1. Associer une épreuve de Bernoulli à chaque lancer. On notera S l'événement "arrêt sur le secteur rouge" et $\bar{S}$ l'événement contraire de S.
2. Justifier que cette situation est associée à une loi binomiale sont on déterminera les paramètres.
3. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.
4. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2- L'espérance d'une loi binomiale

Propriété (admise)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
L'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est égale à $n \times p$.

Exercice d'application 5 :

Un élève répond au hasard à quatre questions indépendantes d'un Questionnaire à choix multiple (Q.C.M.). Chaque question comporte trois réponses dont une seule est exacte.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses de d'un élève à l'issu du Q.C.M.

1. Justifier que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Construire l'arbre pondéré associé à la situation.
2. Déterminer cette loi binomiale.
3. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat ainsi obtenu.

III- Coefficients binomiaux et loi binomiale

1- Définition : *Coefficients binomiaux*

Soit n un entier naturel non nul et k un entier compris entre 0 et n. On dispose de l'arbre pondéré d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. Le coefficient binomiale, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès sur les n épreuves.

2- Propriété : *Formule générale de la loi binomiale*

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.
Pour tout entier naturel k compris entre 0 et n, on a :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k}.$$

3- Utilisation de la calculatrice :

Opération	Texas Instruments TI-83 plus
$\binom{n}{k}$	n Combinaison k
$P(X=k)$	binomFdp(n,p,k)
$P(X \leqslant k)$	binomFrép(n,p,k)

IV- Intervalle de fluctuation à partir de la loi binomiale

1- Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ et $F=\dfrac{X}{n}$ la variable aléatoire qui représente la fréquence aléatoire du succès.
Un intervalle de fluctuation de F au seuil de 95% est un intervalle de la forme : $\left[\dfrac{a}{n}\,;\,\dfrac{b}{n}\right]$ où a et b sont des entiers entre 0 et n tel que : $P\left(\dfrac{a}{n}\leqslant F\leqslant\dfrac{b}{n}\right)\geqslant 0,95$

Remarque :

Dans la pratique, pour obtenir l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n}\,;\frac{b}{n}\right]$, il suffit de trouver les entiers a et b vérifiant les conditions suivantes : $P(X \leqslant a) \geqslant 0,025$ et $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

En effet, ces deux conditions impliquent que $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0,95$.

Exercice d'application 6 :

On considère un paquet de cartes contenant 3 cœurs et 7 piques et on effectue 100 tirages d'une carte en remettant à chaque fois la carte dans le paquet.
Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence d'une carte de cœur dans l'échantillon prélevé.

2- Prise de décision à partir d'un échantillon :

Exemple :

On cherche à savoir si une pièce est bien équilibrée.
On fait l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée. Ainsi, la probabilité d'obtenir PILE est égale à $0,5$.

On lance 100 fois cette pièce et on détermine la fréquence f de PILE obtenue. On se fixe le seuil 95% et on détermine l'intervalle de fluctuation à l'aide de la loi binomiale $\mathscr{B}(100\,;\,0,5)$.

On prend une décision suivant les deux possibilités suivantes :

1. Si f n'est pas dans l'intervalle de fluctuation, on rejette l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée avec un risque de se tromper de 5%.
2. Si $f$est dans l'intervalle de fluctuation, on ne rejette pas l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée. Cela ne veut pas dire qu'on accepte cette hypothèse car le risque de se tromper en l'acceptant est inconnu.