Probabilités

I- Définitions et propriétés

Exemple d'application 1 :
On effectue un lancé de dé à six faces, numérotées de 1 à 6. On définie les quatre événements suivants :

E_1 : "Avoir un chiffre pair"
E_2 : "Avoir un chiffre impair"
E_3 : "Avoir un chiffre supérieur ou égal à 2"
E_4 : "Avoir le chiffre 6"

1. Donner l'ensemble E des résultats possibles.
2. Expliciter les ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4.

Vocabulaire :
- **L'univers** Ω associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les éventualités qu'implique le résultat de cette expérience.
- **Un événement** est une partie de Ω composée d'un ou plusieurs éléments (ou éventualités) de cet univers.
- **Un événement élémentaire** est un événement composé d'un seul élément de Ω.
- **Un événement certain** se réalise quelque soit le résultat de l'expérience.
- **Un événement impossible** est un événement qui ne se réalise jamais.
- **L'événement contraire** de A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble de toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A.
- Deux événements A et B sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps. Par exemple, les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

1 - Probabilité :

a - Définition :
Une probabilité est une fonction P dont l'ensemble de départ est Ω et l'ensemble d'arrivé est l'intervalle $[0, 1]$. On a :

$$\begin{array}{rcccl} P & : & \Omega & \longrightarrow & [0\ ;\ 1] \\ & & A & \longmapsto & P(A) \end{array}$$

b - Propriété :
On note Ω l'ensemble de toutes les éventualités et $P(A)$ la probabilité d'un événement quelconque A. On a alors :

1) $0 \leq P(A) \leq 1$;
2) $P(\Omega) = 1$;
3) $P(\emptyset) = 0$, où $\emptyset$ est la partie vide de Ω.

2 - Équiprobabilité :

a - Définition
Lors d'une expérience aléatoire, on dit qu'il y a équiprobabilité lorsque toutes les issues ont la même probabilité de se réaliser.

b - Propriété
Dans le cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est égale à : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues possibles}}$.

3 - Loi de probabilité :

Soit $E = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ un ensemble fini. La loi de probabilité P sur l'ensemble E est la liste $(p_1, p_2, ..., p_k)$ des probabilités des éléments de E.
On a alors : $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_k = 1$, où p_i est la probabilité de l'éventualité x_i.

Remarque :
Pour facilité sa lecture, on définie généralement la loi de probabilité d'une variable à l'aide d'un tableau.

Exemple d'application 2 :
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. Définir l'ensemble Ω des éventualités et la probabilité de chacune de ces éventualités.
2. Quelle est la probabilité des événements suivants :

   - A : la carte tirée est le roi de cœur ;
   - B : la carte tirée est un as ;
   - C : la carte tirée est rouge ;
   - D : la carte tirée est un as ou une carte rouge ;

Exemple d'application 3 :
Un supermarché distribue des tickets à ses 1 000 premiers clients. 500 tickets font gagner 10 euros, 90 tickets font gagner 20 euros, 10 tickets font gagner 50 euros et 400 tickets ne font rien gagner.
Un ticket est distribué au hasard à chaque client à la caisse et X est la variable aléatoire qui à chaque ticket associe le gain inscrit sur celui-ci.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un ticket de 20 euros ou plus.

4 - Réunion et intersection
Soient A et B deux événements d'un ensemble E.
— $A \cap B$ est l'intersection de A et B. C'est l'ensemble des événements de E qui sont à la fois dans A et dans B.
— $A \cup B$ la réunion de A et B. C'est l'ensemble des événements de E qui sont dans A ou dans B.

Remarque :
Soient A et B deux événements incompatibles de l'ensemble E. On obtient alors : $A \cap B = \emptyset$.

5 - Propriétés des probabilités :

On note A et B deux évènements.
— Si A et B sont deux événements quelconques, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
— Si A et B sont deux événements incompatibles, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
— Soit $\bar{A}$ l'événement contraire de A. On a : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

II- Probabilité conditionnelle

1- Définition :
Soit P une loi de probabilité sur un ensemble Ω. A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$ est définie par : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Remarque : Si $P(B) \neq 0$, on définie également $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Exemple d'application 4 :
Un service après-vente a constaté que les retours d'un appareil sont dus dans 30% des cas à une panne A, dans 40% des cas à une panne B et dans 3% des cas à la simultanéité des deux pannes. Un appareil choisi au hasard présente la panne A. Quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi la panne B ?

2- Propriété : Probabilité d'intersection
Une loi de probabilité P est définie sur un ensemble Ω.
A et B sont deux événements tels que $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Exemple d'application 5 :
Tous les élèves de Terminale d'un lycée ont passé un teste de certification en anglais.

(1) 80 % ont réussi le test.
(2) Parmi ceux qui ont réussi le test, 9,5 % n'ont jamais redoublé.
(3) Parmi ceux qui ont échoué le test, 2 % n'ont jamais redoublé.

On considère les événements suivants :
T : "L'élève a réussi le test"
D : "L'élève a déjà redoublé".
$T \cap \bar{D}$: "L'élève a réussi le test et n'a jamais redoublé"
Calculer $P(T \cap \bar{D})$.

3- Utilisation d'un tableau à double entrée :

Exemple d'application 6 :
Une société comprend 40% de cadres dont la moitié parle anglais.
De plus, 70% de la totalité de ses employés ne parlent pas anglais.
On interrogé au hasard un employé de cette entreprise.
On considère les événements suivants :
C :" L'employé interrogé est un cadre".
A : "L'employé interrogé parle anglais".

1. Compléter le tableau des fréquences à double entrées ci-dessous.

	A	$\bar{A}$	Total
C			
$\bar{C}$			
Total			

2. Quelle est la probabilité que l'employé interrogé ne soit pas un cadre et parle anglais ?
3. Sachant que l'employé n'est pas un cadre, quelle est la probabilité qu'il parle anglais ?

4- Représentation par un arbre pondéré :
On peut représenter l'exemple précédent par un arbre pondéré en respectant certains points :

1. Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants.
2. Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit les probabilités conditionnelles
3. la somme des probabilités inscrites sur les branches issues du même noeud est égale à 1
4. Le produit des probabilités des événements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Exercices 1 :
Un magasin d'articles de jardin fait une promotion sur des tulipes et des jacinthes de couleur blanche, rouge ou violacée. Le commerçant met en vente 400 fleurs qui se répartissent selon le tableau suivant :

Fleur / Couleur	Blanche	Rouge	Violacée	Total
Tulipes	90	140	20	250
Jacinthes	30	60	60	150
Total	120	200	80	400

On prend une fleur au hasard parmi les 400.

1. On note T l'événement "La fleur est un tulipes" et B l'événement "La fleur est blanche". Calculer $P(T)$, $P_T(B)$. En déduire $P(T \cap B)$.
2. Décrire l'expérience aléatoire par un arbre de probabilités.
3. Utiliser l'arbre pour calculer la probabilité d'obtenir une fleur blanche.