Les fonctions du second degré

1 - Définition :
Une fonction du second degré est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui, à tout x associe :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où $a,\ b$ et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

2 - Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Tout réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$ est appelé ***racine*** de la fonction f.

3 - Discriminant et résolution d'équation du second degré dans $\mathbb{R}$:
On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a,\ b$ et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Pour résoudre une équation du second degré de la forme : $ax^2 + bx + c$, on commence par calculer le discriminant Δ et on regarde son signe :

- Si $\Delta > 0$: f admet deux racines dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$: f admet une une seule racine (ou deux racine confondues) dans $\mathbb{R}$:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$: f n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$.

4 - Factorisation :
En fonction du signe de Δ et dans certains cas, il est possible de factoriser la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a,\ b$ et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

- Si $\Delta > 0$: f admet deux racines x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$ et la forme factorisée est donnée par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Si $\Delta = 0$: f admet une seule racine x_0 dans $\mathbb{R}$ et la forme factorisée est donnée par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Si $\Delta < 0$: f n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$. Alors, la factorisation dans $\mathbb{R}$ n'est pas possible.

5 - Signe d'une fonction du second degré :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a,\ b$ et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
En fonction des différents cas suivants, le signe de f est donné dans les tableaux ci-dessous.

1er cas : $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a	

2ème cas : $\Delta = 0$

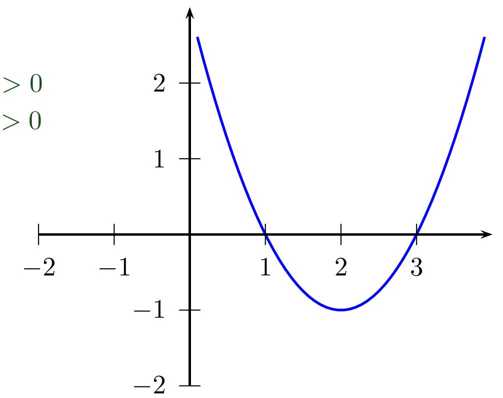
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

3$^{\text{ème}}$ cas : $\Delta < 0$

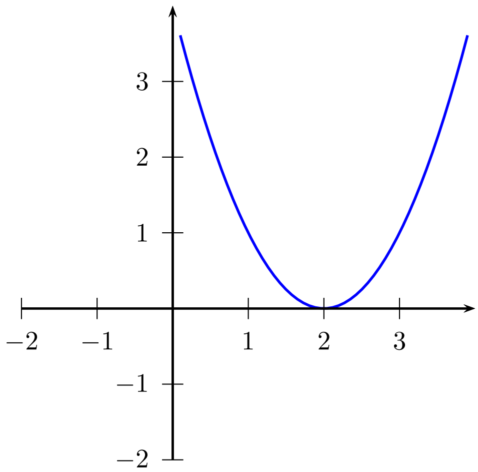
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

6 - Représentation graphique :

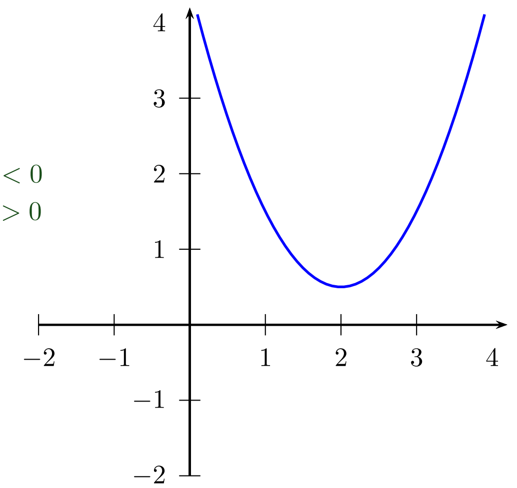
$\Delta > 0$
$a > 0$

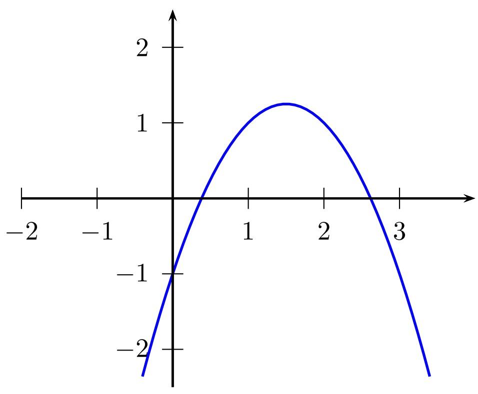


$\Delta = 0$
$a > 0$



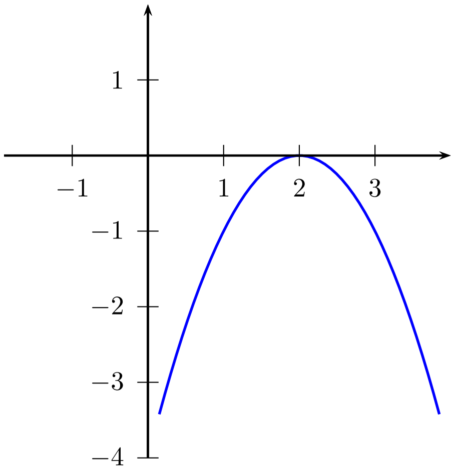
$\Delta < 0$
$a > 0$

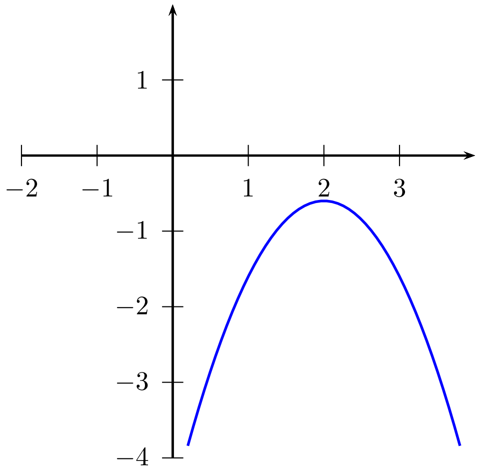




$\Delta > 0$
$a < 0$

$\Delta = 0$
$a < 0$





$\Delta < 0$
$a < 0$