

Fonction exponentielle

I - Définition et propriétés :

1 - Définition :

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle et se note $\exp(x)$ ou e^x .

On peut résumer par :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp(x) \end{aligned}$$

où $\exp(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp)'(x) = \exp(x)$.

2 - Propriétés :

1. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

II - Étude de la fonction exponentielle

Soit $f(x) = \exp(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)$ sa dérivée.

1 - Les limites :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

2 - La dérivée de la fonction $x \mapsto \exp[u(x)] = e^x$:

Soit u un fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors, $f(x) = e^{u(x)}$ admet comme dérivée la fonction : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

En particulier, si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.

3 - Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

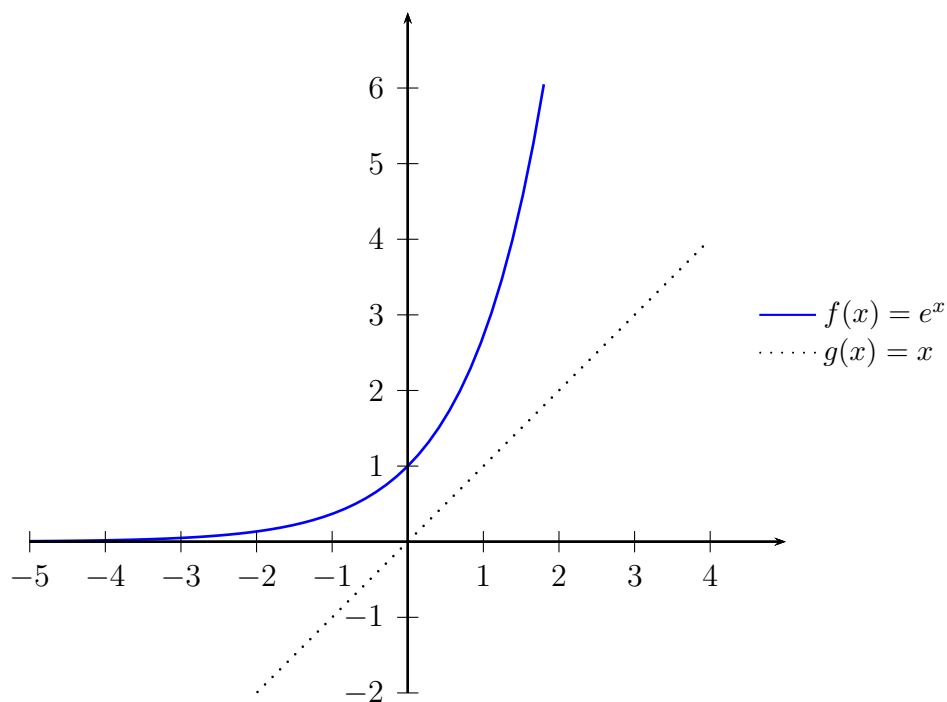
4 - Tableau de signe :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

5 - Représentation graphique :

Propriété :

On dit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe de la fonction exponentielle pour signifier que la limite de e^x en $-\infty$ est égale à 0.



6 - Propriétés :

Soit a et $b \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$1. e^a = e^b \iff a = b.$$

$$2. e^a < e^b \iff a < b.$$

7 - Propriété algébrique

Si a et b sont deux réels et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$1. e^0 = 1$$

$$3. e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b};$$

$$5. (e^a)^n = e^{a \times n};$$

$$2. e^{a+b} = e^a \times e^b;$$

$$4. e^{-a} = \frac{1}{e^a};$$

$$6. \sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}.$$