

Fonction logarithme népérien

I - Définition et propriétés :

1 - Définition :

Pour tout réel $x > 0$, l'équation $e^y = x$, d'inconnue réelle y admet une unique solution.

La fonction qui à x associe cette solution est appelée fonction logarithme népérien. On a ainsi : $y = \ln x$

On peut résumer par :

$$\begin{array}{ccc} \ln :]0 ; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

$$\forall x > 0, \quad e^y = x \iff y = \ln x$$

2 - Propriétés :

$$1. \quad \forall x > 0, \quad e^{\ln x} = x$$

$$2. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x.$$

3 - Propriétés :

1. La fonction $f(x) = \ln x$ est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$.
2. La fonction $f(x) = \ln x$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

II - Étude de la fonction logarithme népérien

Soit $f(x) = \ln x$ définie sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x)$ sa dérivée.

1 - Les limites :

$$1. \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

2 - La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$:

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors, $f(x) = \ln[u(x)]$ a pour dérivée la fonction : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

En particulier, si $f(x) = \ln x$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$.

3 - Tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

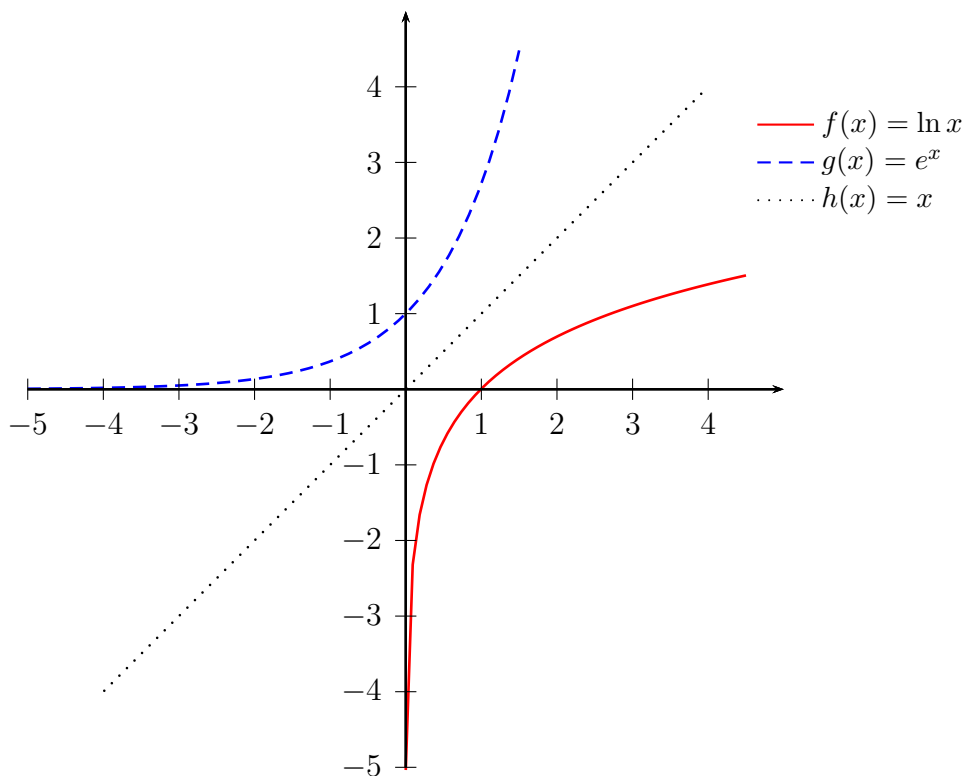
4 - Tableau de signe :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

5 - Représentation graphique :**Propriété :**

Les courbes représentatives des fonctions exponentielles et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).

Remarque : On dit que les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont réciproques l'une de l'autre.

**6 - Propriétés :**

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+^*$. On a les équivalences suivantes :

$$1. \ln a = \ln b \iff a = b.$$

$$2. \ln a < \ln b \iff a < b.$$

En particulier, on a :

$$1. \ln a < 0 \iff 0 < a < 1.$$

$$2. \ln a = 0 \iff a = 1.$$

$$3. \ln a > 0 \iff a > 1.$$

7 - Propriété algébrique

Pour tout réel $a > 0$, $b > 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$1. \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b);$$

$$3. \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a);$$

$$4. \ln(a^k) = k \times \ln(a);$$

$$2. \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b);$$

$$5. \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a).$$

III - Le logarithme décimale**Définition :**

La fonction logarithme décimale, notée $\log$, est définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

En particulier, $\log 10 = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$

Remarque : Les fonctions logarithme décimale et logarithme népérien ont les mêmes propriétés.