Probabilités

I- Définitions et propriétés

Exemple d'application 1 :
On effectue un lancé de dé à six faces, numérotées de 1 à 6. On définie les quatre événements suivants :

E_1 : "Avoir un chiffre pair"
E_2 : "Avoir un chiffre impair"
E_3 : "Avoir un chiffre supérieur ou égal à 2"
E_4 : "Avoir le chiffre 6"

1. Donner l'ensemble E des résultats possibles.
2. Expliciter les ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4.

Vocabulaire :
- **L'univers** Ω associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les éventualités qu'implique le résultat de cette expérience.
- **Un événement** est une partie de Ω composée d'un ou plusieurs éléments (ou éventualités) de cet univers.
- **Un événement élémentaire** est un événement composé d'un seul élément de Ω.
- **Un événement certain** se réalise quelque soit le résultat de l'expérience.
- **Un événement impossible** est un événement qui ne se réalise jamais.
- **L'événement contraire** de A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble de toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A.
- Deux événements A et B sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps. Par exemple, les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

1 - Probabilité :

a - Définition :
Une probabilité est une fonction P dont l'ensemble de départ est Ω et l'ensemble d'arrivé est l'intervalle $[0, 1]$. On a :

$$\begin{array}{cccc} P & : & \Omega & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ & & A & \longmapsto & P(A) \end{array}$$

b - Propriété :
On note Ω l'ensemble de toutes les éventualités et $P(A)$ la probabilité d'un événement quelconque A. On a alors :

1) $0 \leq P(A) \leq 1$;
2) $P(\Omega) = 1$;
3) $P(\emptyset) = 0$, où $\emptyset$ est la partie vide de Ω.

2 - Équiprobabilité :

a - Définition
Lors d'une expérience aléatoire, on dit qu'il y a équiprobabilité lorsque toutes les issues ont la même probabilité de se réaliser.

b - Propriété
Dans le cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est égale à : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues possibles}}$.

3 - Loi de probabilité :

Soit $E = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ un ensemble fini. La loi de probabilité P sur l'ensemble E est la liste $(p_1, p_2, ..., p_k)$ des probabilités des éléments de E.

On a alors : $\sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_k = 1$, où p_i est la probabilité de l'éventualité x_i.

Remarque :
Pour facilité sa lecture, on définie généralement la loi de probabilité d'une variable à l'aide d'un tableau.

Exemple d'application 2 :
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. Définir l'ensemble Ω des éventualités et la probabilité de chacune de ces éventualités.
2. Quelle est la probabilité des événements suivants :

— A : la carte tirée est le roi de cœur ;
— B : la carte tirée est un as ;
— C : la carte tirée est rouge ;
— D : la carte tirée est un as ou une carte rouge ;

4- Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire :

Définitions :
X est une variable aléatoire définie sur E et prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Les probabilités associées sont données dans le tableau ci-dessous :

Valeur de X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

— L'**espérance mathématiques** de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est le nombre réel définie par : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$
— La **variance** de la variable aléatoire X est le nombre réel positif, noté $V(X)$, tel que :
$$\begin{aligned} V(X) &= p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2 \end{aligned}$$
— L'**écart-type** $\sigma(X)$ est défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple d'application 3 :
Un supermarché distribue des tickets à ses 1 000 premiers clients. 500 tickets font gagner 10 euros, 90 tickets font gagner 20 euros, 10 tickets font gagner 50 euros et 400 tickets ne font rien gagner.
Un ticket est distribué au hasard à chaque client à la caisse et X est la variable aléatoire qui à chaque ticket associe le gain inscrit sur celui-ci.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un ticket de 20 euros ou plus.
4. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

5 - Réunion et intersection
Soient A et B deux événements d'un ensemble E.
— $A \cap B$ est l'intersection de A et B. C'est l'ensemble des événements de E qui sont à la fois dans A et dans B.
— $A \cup B$ la réunion de A et B. C'est l'ensemble des événements de E qui sont dans A ou dans B.

Remarque :
Soient A et B deux événements incompatibles de l'ensemble E. On obtient alors : $A \cap B = \emptyset$.

6 - Propriétés des probabilités :

On note A et B deux évènements.
— Si A et B sont deux événements quelconques, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
— Si A et B sont deux événements incompatibles, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
— Soit $\bar{A}$ l'événement contraire de A. On a : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

7 - Propriétés :

En appliquant une transformation affine $x \longrightarrow ax + b$ à la variable X, on obtient les égalités suivantes :

1. $E(aX + b) = aE(X) + b$
2. $V(aX + b) = a^2V(X)$
3. $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

II- Probabilité conditionnelle

1- Définition :
Soit P une loi de probabilité sur un ensemble Ω. A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$ est définie par : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Remarque : Si $P(B) \neq 0$, on définie également $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Exemple d'application 4 :
Un service après-vente a constaté que les retours d'un appareil sont dus dans 30% des cas à une panne A, dans 40% des cas à une panne B et dans 3% des cas à la simultanéité des deux pannes. Un appareil choisi au hasard présente la panne A. Quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi la panne B ?

Remarque : On a $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

2- Propriété : Probabilité d'intersection
Une loi de probabilité P est définie sur un ensemble Ω.
A et B sont deux événements tels que $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Exemple d'application 5 :
Tous les élèves de Terminale d'un lycée ont passé un teste de certification en anglais.

(1) 80 % ont réussi le test.
(2) Parmi ceux qui ont réussi le test, 9,5 % n'ont jamais redoublé.
(3) Parmi ceux qui ont échoué le test, 2 % n'ont jamais redoublé.

On considère les événements suivants :
T : "L'élève a réussi le test"
D : "L'élève a déjà redoublé".
$T \cap \bar{D}$: "L'élève a réussi le test et n'a jamais redoublé"
Calculer $P(T \cap \bar{D})$.

3- Utilisation d'un tableau à double entrée :

Exemple d'application 6 :
Une société comprend 40% de cadres dont la moitié parle anglais.
De plus, 70% de la totalité de ses employés ne parlent pas anglais.
On interrogé au hasard un employé de cette entreprise.
On considère les événements suivants :
C :" L'employé interrogé est un cadre".
A : "L'employé interrogé parle anglais".

1. Compléter le tableau des fréquences à double entrées ci-dessous.

	A	$\bar{A}$	Total
C			
$\bar{C}$			
Total			

2. Quelle est la probabilité que l'employé interrogé ne soit pas un cadre et parle anglais ?
3. Sachant que l'employé n'est pas un cadre, quelle est la probabilité qu'il parle anglais ?

4- Représentation par un arbre pondéré :
On peut représenter l'exemple précédent par un arbre pondéré en respectant certains points :

1. Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants.
2. Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit les probabilités conditionnelles
3. la somme des probabilités inscrites sur les branches issues du même noeud est égale à 1
4. Le produit des probabilités des événements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

5- Partition d'un ensemble :
Les parties B_1, B_2, ..., B_n, pour $n \geq 2$, forment une partition de l'ensemble E lorsque les trois conditions suivantes sont réalisées.
1- $\forall i$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n, \quad B_i \neq \emptyset$.
2- $\forall i, j$ tels que $1 \leq i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leq n$ et $i \neq j : \quad B_i \cap B_j \neq \emptyset$.
3- $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = E$.

6- Formule des probabilités totales :

Propriété :
Cas général : Si B_1, B_2, ..., B_n sont des évènements de probabilités non nulles qui forment une partition de Ω, alors

la probabilité d'un évènement A de Ω est donnée par :

$P(A) = P(A \cap B_1) + ... + P(A \cap B_n)$ ou $P(A) = P(B_1) \times P_{B_1}(A) + ... + P(B_n) \times P_{B_n}(A)$

Cas particulier : Si B est un événement de probabilité non nulle, alors pour tout événement A de l'univers :

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ ou $P(A) = P_B(A) \times P(B) + P_{\bar{B}}(A) \times P(\bar{B})$

Exemple d'application 7 :
On considère un univers Ω muni d'une loi de probabilité P et deux événements A et B de Ω de probabilité non nulle, tels que :
$P(A \cap B) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ et $P_{\bar{B}}(A) = 0,2$

1. Déterminer $P_B(A)$.
2. Déterminer $P(A)$.
3. En déduire $P(A \cup B)$.

7- Indépendance de deux événements :

a - Définition :
On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

b - Propriété :
Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

c - Interprétation :
Affirmer que A et B sont deux événements indépendants, avec $P(A) \neq 0$, signifie que la probabilité de B n'est pas influencée par la réalisation de A. On a ainsi :

$$P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = P(B)$$

Remarque : Dans ces même conditions, on peut également montrer que si $P(B) \neq 0$, alors $P_B(A) = P_{\bar{B}}(A) = P(A)$.

III - Loi binomiale

1 - Schéma de Bernoulli

a - Épreuve de Bernoulli

Définition On appelle épreuve de Bernoulli, une expérience aléatoire ayant deux issues.

Exemple d'application 8 :
Une urne contient dix boules : 7 noirs et 3 rouges. Les boules sont indiscernables au toucher.
L'expérience consiste à tirer une boule au hasard et observer sa couleur. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Réponse :
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli. En effet, il y a deux issues possible lorsqu'on tire une boule :
— A : "la boule choisit est de couleur noire";
— B : "la boule choisit est de couleur rouge";
Étant donné qu'on cherche la probabilité de tirer une boule rouge, on dit qu'il y a "Succès" lorsque l'événement B se réalise. Et par opposition, pour l'événement A, on parle d'"échec". On a alors $P(B) = \dfrac{3}{10} = 0,3$

b - La loi de Bernoulli

Définition
On appelle loi de Bernoulli de paramètre p, la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à p.
On peut résumer cette loi de probabilité dans le tableau ci-dessous.

Issue	Succès	Échec
Probabilité	p	$1 - p$

c - Schéma de Bernoulli

Définition
On appelle schéma de Bernoulli, la répétition d'une même épreuve de Bernoulli dans des conditions d'indépendances. Dans ce cas, l'issue d'une épreuve ne dépend pas de celles des épreuves précédentes.

Exemple d'application 9 :
Dans une classe de Première, il y a 12 garçons et 15 filles. Le professeur choisit au hasard la fiche d'un élève.

1. Associer une épreuve de Bernoulli à cette situation (ou expérience).
2. Déterminer la loi de probabilité associée à cette épreuve.
3. Le professeur choisit au hasard la fiche d'un élève et puis, sans la remettre en place, en choisit une seconde.
   (a) Peut-on associer un schéma de Bernoulli à cette situation ?
   (b) Construire l'arbre pondéré lié à cette situation.

Exemple d'application 10 :
Lors d'un match de basket, un joueur est confronté trois fois à l'épreuve du lancer franc. On suppose que ses lancers sont indépendants.
On sais que ce joueur réussit en moyenne quatre lancers sur cinq.

1. Associer un schéma de Bernoulli à cette situation.
2. Construire l'arbre pondéré lié à l'énoncé.

2- Loi binomiale

a - Définition
Un schéma de Bernoulli est constitué de n épreuves pour lesquelles la probabilité de succès est égales à p. Soit X, la variable aléatoire qui compte le nombre de succès lors des n épreuves.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.

Remarque : On notera $\mathscr{B}(n, p)$ la loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple d'application 11 :
On lance deux fois de suite, de façon indépendante, une roue partagée en quatre secteurs de tailles identiques. Les quatre secteurs portent les couleurs suivantes : rouge, vert, bleu et blanc.
Soit X, la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la roue s'arrête sur le secteur rouge.

1. Associer une épreuve de Bernoulli à chaque lancer. On notera S l'événement "arrêt sur le secteur rouge" et $\bar{S}$ l'événement contraire de S.
2. Justifier que cette situation est associée à une loi binomiale sont on déterminera les paramètres.
3. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.
4. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b - L'espérance d'une loi binomiale

Propriété
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
L'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est égale à $n \times p$.

Exemple d'application 12 :
Un élève répond au hasard à quatre questions indépendantes d'un Questionnaire à choix multiple (Q.C.M.). Chaque question comporte trois réponses dont une seule est exacte.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses de d'un élève à l'issu du Q.C.M.

1. Justifier que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Construire l'arbre pondéré associé à la situation.
2. Déterminer cette loi binomiale.
3. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat ainsi obtenu.

3 - Coefficients binomiaux et loi binomiale

a - Définition : *Coefficients binomiaux*
Soit n un entier naturel non nul et k un entier compris entre 0 et n. On dispose de l'arbre pondéré d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. Le coefficient binomiale, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès sur les n épreuves.

b - Propriété :
Soit n et k deux entiers tels que : $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$. On a alors :

1. $\binom{n}{0} = 1$
2. $\binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
4. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

c - Propriété : *Triangle de Pascal*

Soit n et k deux entiers tels que : $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leq n$. On obtient grâce au triangle de Pascal, les nombres $\binom{n}{k}$:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	...	...	...	...	...	...	...

d - Propriété : *Formule générale de la loi binomiale*
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.
Pour tout entier naturel k compris entre 0 et n, on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}.$$