Les nombres complexes

Exercice d'introduction :

Le but de cet exercice est de vérifier la validité de la formule de CARDAN.
Cette formule permet de trouver les solution des équations du troisième degré de la forme $x^3 = px+q$.

La formule de CARDAN est donnée par :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

1. Déterminer les valeurs de p et q dans chacune des équations suivantes et indiquer les solutions respectives.

   (a) $x^3 = 3x + 2$ (b) $x^3 = x + 1$ (c) $x^3 = 1$

2. Peut-on utiliser la formule de CARDAN pour l'équation $x^3 = 15x + 4$?

3. Sur $\mathbb{R}$, il n'existe pas de nombres dont le carré est négatif.

   Supposons quand même qu'il existe dans un ensemble imaginaire un nombre dont le carré est égal à -1. Ce nombre imaginaire vaut $\sqrt{-1}$.

   (a) Développer et réduire les expressions suivantes : $(2 + \sqrt{-1})^3$ et $(2 - \sqrt{-1})^3$.

   (b) En déduire les racines cubique de $2 + 11\sqrt{-1}$ et $2 - 11\sqrt{-1}$.

   (c) Montrer alors que l'équation précédente $x^3 = 15x + 4$ a pour solution le réel 4.

   On obtient donc un résultat bien réel en utilisant un nombre imaginaire !

4. La notation $\sqrt{-1}$ est formellement interdite pour la simple raison que nous allons découvrir.

   On a vu, plus haut, que $(\sqrt{-1})^2 = -1$. Calculer maintenant $(\sqrt{-1})^2$ d'une autre façon.

   (a) On sait que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$. Appliquer cette règle à $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$.

   (b) Que constatez-vous ?

   Désormais, on notera par la lettre i le nombre imaginaire $\sqrt{-1}$.

I - Définition et représentation d'un nombre complexe

1 - Définition

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des nombres de la forme $z = x + iy$, où x et y sont deux réels quelconques et i un nouveau nombre (imaginaire) tel que $i^2 = -1$.

- Le nombre x est la **partie réelle** de z. Le réel x peut être noté $Re(z)$.
- Le nombre y est la **partie imaginaire** de z. Le réel y peut être noté $Im(z)$.

$z = x + iy$ est la **forme algébrique** du complexe z.

Remarque :

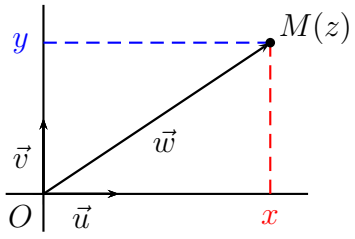
- Si $z = yi$, alors z est un **imaginaire pur**.
- Si $z = x$, alors z est un **réel**.
- L'ensemble des réel $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$. On a alors : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2 - Propriétés

1. L'écriture d'un nombre complexe de la forme $z = x + iy$, où x et $y \in \mathbb{R}$, est unique.
2. Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + y'i$ deux nombres complexes avec x, y, x' *et* $y' \in \mathbb{R}$.
   On a l'équivalence suivante : $z = z' \iff x = x'$ et $y = y'$.

3 - Définition

Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct. Soit M un point du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$ et $z = x + iy$ le nombre complexe associé.
z est alors appelé l'**affixe** du point M.



De même, comme on peut le voir sur la figure, le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ a pour affixe le nombre complexe $z = x + iy$.

4 - Théorème

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$, où z_A et z_b sont respectivement les affixes des points x et y.

Démonstration :
Soit $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points du plan d'affixes respectives $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a donc pour coordonnées $(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$.
Ainsi, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) \\ &= (x_B + iy_B) - i(x_A - iy_A) \\ &= z_B - z_A \end{aligned}$$

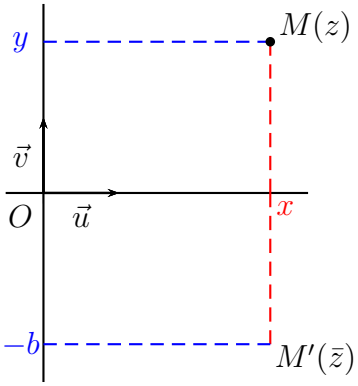
$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe le complexe $z_B - z_A$

5 - Propriétés

Si M a pour affixe $z = x + iy$ et si M' a pour affixe $z = x' + y'i$, avec x, y, x' et $y' \in \mathbb{R}$, alors le milieu du segment $[MM']$ a pour affixe $\dfrac{z + z'}{2}$.

6 - Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe où x et $y \in \mathbb{R}$. Alors $\bar{z} = x - yi$ est le conjugué de z.



7 - Propriétés

Pour tout nombres complexes z et z', on a :

1. $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = Re(z)$ et $\dfrac{z-\overline{z}}{2i} = Im(z)$.
2. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z}'$ et $\overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z}'$.
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z}'$.
4. $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ et $z\overline{z} = x^2 + y^2$.
5. Si $z \neq 0$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$.
6. Si $z\overline{z} = 1$, alors $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
7. $z = \overline{z} \iff z$ est un réel .
8. $z = -\overline{z} \iff z$ est un imaginaire pur.

Remarque : La propriété 4. sert dans la recherche de la forme algébrique d'inverses et des quotients.

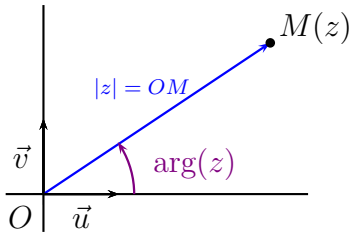
Exemple : Mettez $z = \dfrac{2+4i}{1-i}$ sous la forme algébrique.

II - Module et argument d'un nombre complexe

1 - Définition

Soit $(O;\, \vec{u},\, \vec{v})$ un repère orthonormé direct. Soit M un point du plan complexe et z son affixe.

- Le module de z, noté $|z|$, est égal à la distance OM : $|z| = OM$.
- Si $z \neq 0$, l'argument de z, noté $arg(z)$, est la mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\, \overrightarrow{OM})$: $arg(z) = (\vec{u}\,;\, \overrightarrow{OM})$.



Conséquence :

— Si $z = x + iy$, où x, $y \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

— Si les points x et y ont pour affixes respectifs z_A et z_B, alors $AB = |z_B - z_A|$.

2 - Propriétés : Modules

Pour tout nombres complexes z et z', on a :

1. $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
2. $|zz'| = |z||z'|$.
3. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
4. Inégalité triangulaire : $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

3 - Propriétés : Arguments

Pour tout nombres complexes z et z', on a :

1. Pour $z \neq 0$: $arg(-z) = arg(z) + \pi \quad [2\pi]$.
2. Pour $z \neq 0$: $arg(\bar{z}) = -arg(z) \quad [2\pi]$.
3. $arg(z\overline{z'}) = arg(z) + arg(z') \quad [2\pi]$.
4. $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') \quad [2\pi]$.
5. $arg(z) = 0 \quad (\pi) \Longleftrightarrow z$ est un réel.
6. $arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi) \Longleftrightarrow z$ est un imaginaire pur.

III - Résolution d'équations du second degré

Théorème

Soit l'équation $(E) : \quad az^2 + bz + c = 0, \quad$ où a, b et $c \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.

On note Δ le nombre réel tel que : $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si Δ>0, l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution réelles : $x_1 = \frac{-b}{2a}$.

— Si $\Delta < 0$,

- dans $\mathbb{R}$, il n'y a pas de solution.
- dans $\mathbb{C}$, il y a deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2 tels que $z_1 = \overline{z_2}$ avec :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

.

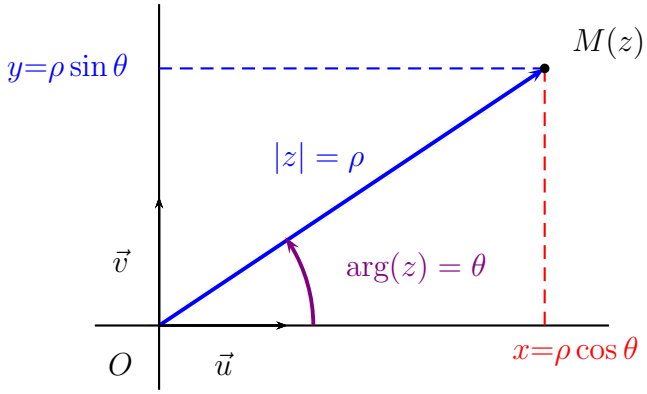
IV - Forme trigonométrique

1 - Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul où $x,\ y \in \mathbb{R}$.

On pose $|z| = \rho$ et $arg(z) = \theta \quad (2\pi)$. On a alors : $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$.

La **forme trigonométrique** du complexe z est alors donnée par : $z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.



Conséquences :

1. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
3. $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

V - Forme exponentielle

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul où $x,\ y \in \mathbb{R}$ tel que : $|z| = \rho$ et $arg(z) = \theta \quad [2\pi]$.

À partir de la forme trigonométrique du nombre complexe $z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, on en déduit la **forme exponentielle** de z :

$$z = \rho\, e^{i\theta}.$$

VI - Formule de Moivre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\,\theta) + i\sin(n\,\theta).$$

Remarque :

On peut démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall z \neq 0$, on a :

$$|z^n| = |z|^n \qquad \text{et} \qquad [arg(z)]^n = n \times arg(z) \quad [2\pi].$$

VII - Nombre complexe et géométrie

Le plan est muni d'une repère orthonormal $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

1 - Calcul d'angles

Théorème 1 :

Si A et B sont deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives z_a et z_B alors :

$$(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A) \quad [2\pi].$$

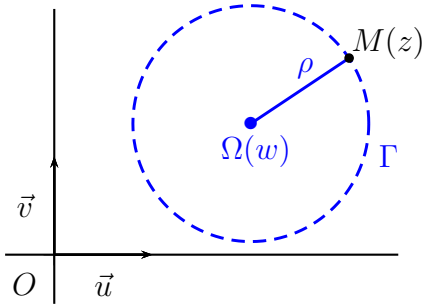
Théorème 2 :

$A,\ B,\ C$ et D sont des points d'affixes $z_A,\ z_B,\ z_C$ et z_D tels que : $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.

Alors $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.

2 - Caractérisation d'ensembles de points :

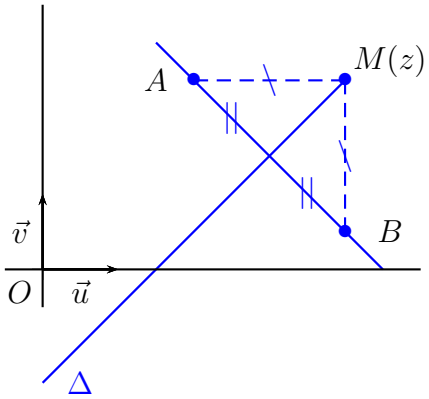
1. Soit ρ un nombre réel strictement positif et w un nombre complexe.
   L'ensemble Γ des points M d'affixes z tels que $|z-w| = \rho$ est le cercle de centre $\Omega(w)$, d'affixe w et de rayon ρ.



   Remarque :
   L'égalité $|z - w| = \rho$ signifie que le nombre complexe $z - w$ a pour forme exponentielle $z - w = \rho\, e^{i\theta}$, où le réel θ est un de ces arguments.
   Ainsi, Γ est aussi l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que $z = w + e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

2. A et B sont deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives z_a et z_B.

   L'ensemble Υ (lire upsilon) des points M d'affixes z tels que $|z-z_A| = |z-z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.



$$|z - z_A| = |z - z_B| \Longleftrightarrow AM = BM$$