

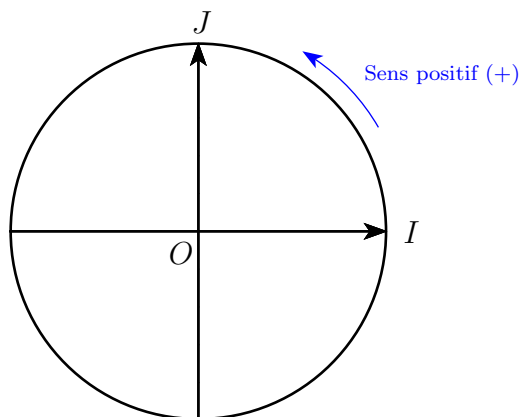
# Trigonométrie

## I - Cercle trigonométrique - Mesure en radian

### 1 - Définition : Cercle trigonométrique

On se place dans un repère orthonormé  $(O; I, J)$ . Un **cercle trigonométrique** est un cercle de centre  $O$ , de rayon 1 et orienté dans le sens positif ou sens direct<sup>1</sup>.

Dans un cercle trigonométrique, le plan  $(O; I, J)$  ainsi que tous les angles sont dit orientés.

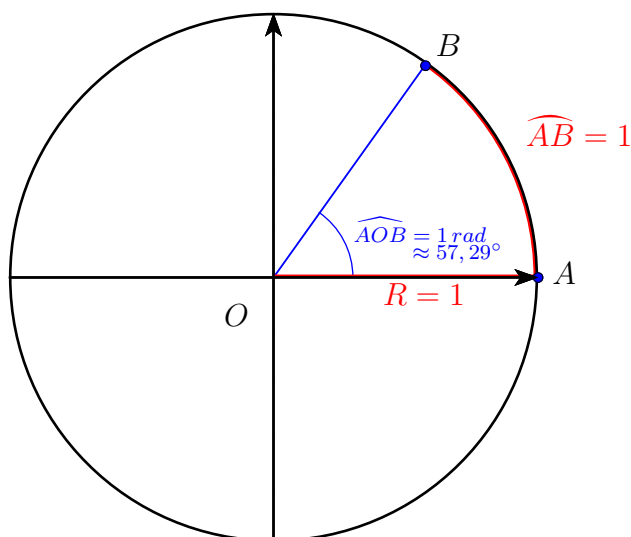


### 2 - Définition : Radian

Un **radian** est la mesure d'un angle au centre d'un cercle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon de ce cercle.

De façon générale, si  $a$  est la longueur d'un arc  $\widehat{AB}$ , la mesure en radian de l'angle  $\widehat{AOB}$  correspondant est égale au nombre  $a$ .

### Illustration



1. Sens positif : sens inverse des aiguilles d'une montre ou sens habituel de dévissage

### 3 - Tableau de correspondance : radian - degré

On peut ainsi faire une correspondance proportionnelle entre les mesures en radians et en degrés.

|                  |             |             |                 |                 |                 |                 |
|------------------|-------------|-------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Mesure en radian | $360^\circ$ | $180^\circ$ | $90^\circ$      | $60^\circ$      | $45^\circ$      | $30^\circ$      |
| Mesure en degré  | $2\pi$      | $\pi$       | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

On rappelle que la mesure  $\pi$  est le rapport (constant) entre la circonférence (ou le périmètre) d'un cercle quelconque et son diamètre.

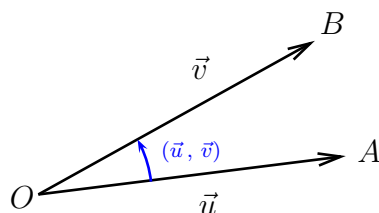
## II - Angles orientés

### 1 - Définition : Angle orienté de deux vecteurs

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls d'un repère orthonormé  $(O; I, J)$ . Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ . Cette situation est représentée sur la figure ci-dessous.

On a alors :

- Les angles  $\widehat{AOB}$  et  $\widehat{BOA}$  ont la même mesure et sont toujours positives.
- L'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$  formé par les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est **un angle orienté** (on tourne de  $\vec{u}$  vers  $\vec{v}$ ). On a ainsi l'égalité suivante :  $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$ .



### 2 - Théorème : Mesures associées à un point

Soit  $M$  un point quelconque du cercle trigonométrique tel que la mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$  est égale à  $x$  radians.

On peut associer au point  $M$  une famille de nombres réels de la forme  $x + 2k\pi$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$ , qui correspondent au même point  $M$  du cercle trigonométrique.

### 3 - Définition :

Soit  $x$  la mesure en radian de l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$  formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans le repère orthonormé  $(O; I, J)$ .

Les valeurs associées à  $x$  de la forme  $x + 2k\pi$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ) sont chacune des mesures de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$

**4 - Définition :**

Soit  $x$  la mesure en radian de l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$  formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans le repère orthonormé  $(O; I, J)$ .

La **mesure principale** de l'angle orienté  $(O; I, J)$  est l'unique valeur associée  $x$  de la forme  $x + 2k\pi$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ) appartenant à l'intervalle  $] - \pi, \pi]$ .

**Remarque :**

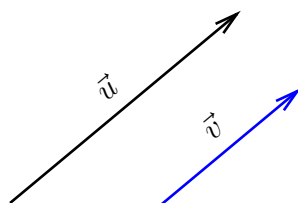
il y a d'autre notation possible de l'expression  $x + 2k\pi$  :  $x$  (modulo  $2\pi$ ),  $x \pmod{2\pi}$  ou  $x [2\pi]$ .

**5 - Propriétés des angles orientés****a - Théorème : angle de deux vecteurs colinéaires**

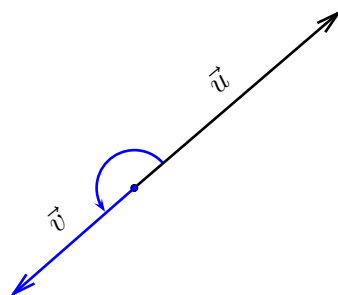
Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls d'un repère orthonormé  $(O; I, J)$ .

On a alors :

1.  $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$  et  $(\vec{u}, -\vec{u}) = \pi$ .
2. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens si, et seulement si  $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .
3. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens contraire si, et seulement si  $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ .



$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens.



$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens contraire.

**b - Théorème : Relation de Chasles**

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls du plan dans un repère orthonormé direct  $(O; I, J)$ .

On a alors :  $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$ .

**c - Théorème : Angles orientés et vecteurs opposés**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls d'un repère orthonormé  $(O; I, J)$ .

On a alors :

- |                                                     |                                                     |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1. $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$       | 3. $(-\vec{u}, \vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})$ |
| 2. $(\vec{u}, -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})$ | 4. $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$      |

**d - Théorème : Généralisation**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan dans un repère orthonormé direct  $(O; I, J)$  et  $k$  et  $k'$  deux nombres réels non nuls.

On a alors :

1. Si  $k$  et  $k'$  sont de même signe, alors :  $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ ;
2. Si  $k$  et  $k'$  sont de signes contraires, alors :  $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})$ .

**III - Cosinus et sinus****1- Définition :**

On se place dans un repère orthonormé  $(O; I, J)$  et on considère un cercle trigonométrique de centre  $O$  et de rayon 1.

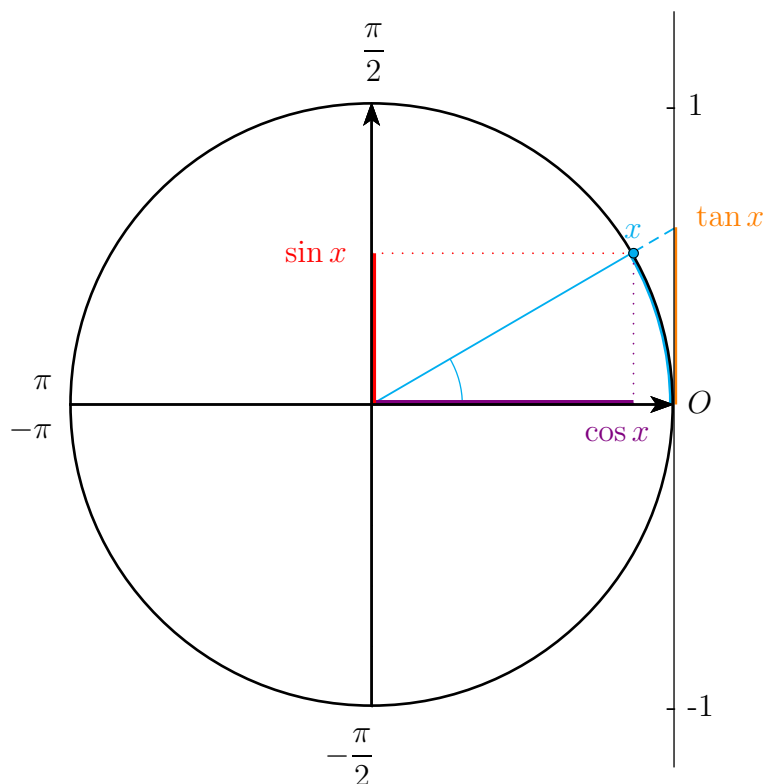
Soit  $M$  un point du cercle tel que :  $(\vec{OI}, \vec{OM}) = \alpha$ .

On a alors :

- Le cosinus de l'angle orienté  $\alpha$  est égal à l'abscisse du point  $M$  dans le repère  $(O; I, J)$ .
- Le sinus de l'angle orienté  $\alpha$  est égal à l'ordonnée du point  $M$  dans le repère  $(O; I, J)$ .

On obtient ainsi l'expression du vecteur  $\vec{OM}$  :

$$\vec{OM} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}$$

**Illustration :**

**2 - Propriétés :**

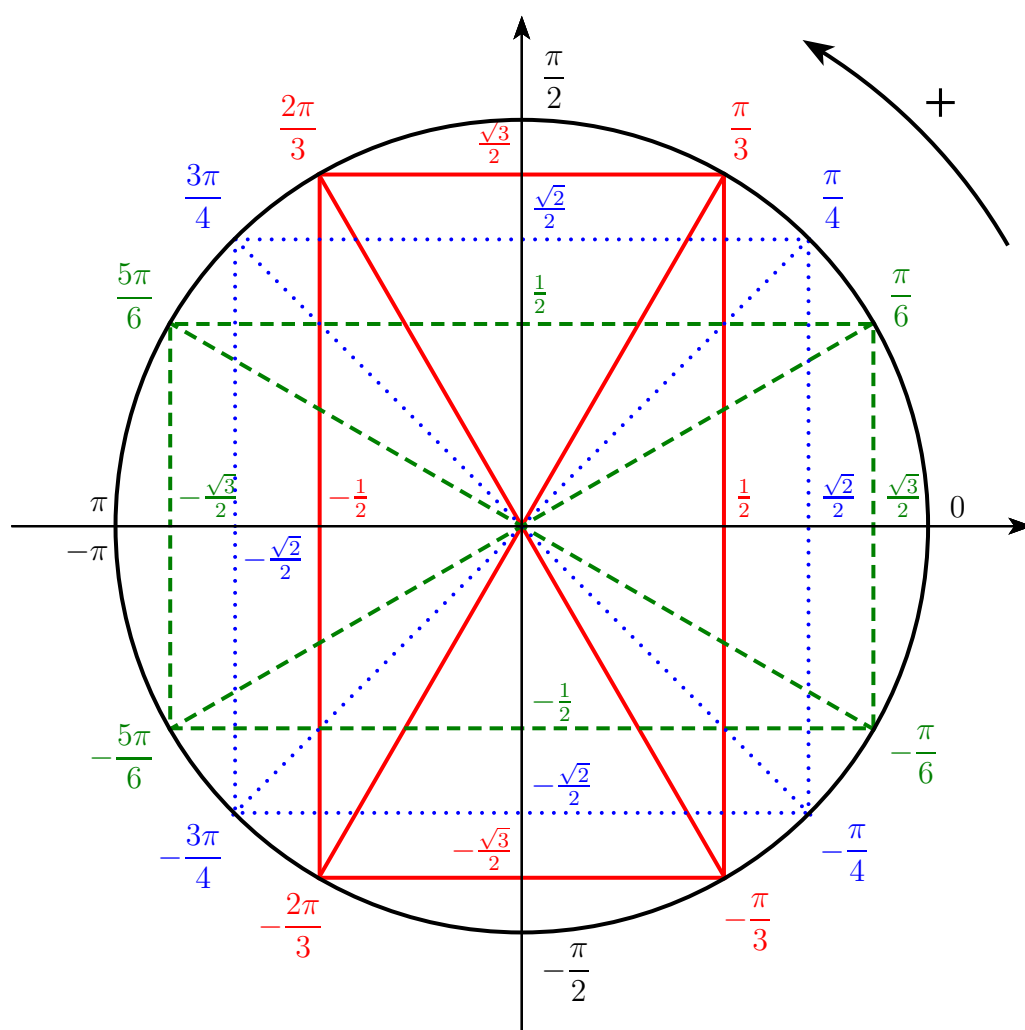
Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  et  $U$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ , on a :

1.  $-1 \leq \cos x \leq 1$ .
2.  $-1 \leq \sin x \leq 1$
3.  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .
4.  $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ .
5.  $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ .
6.  $(\cos U)' = -U' \sin U$ .
7.  $(\sin x)' = U' \cos U$ .
8.  $(\cos x)' = -\sin x$ .
9.  $(\sin x)' = \cos x$ .

**3 - Valeurs remarquables :**

| Mesure en degré | $\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{6}$      |
|-----------------|-------|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin x$        | 0     | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\cos x$        | 1     | 0               | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\tan x$        | 0     |                 | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

On peut résumer tout ceci sur le cercle trigonométrique suivant :



**4 - Formules des angles associé :**

Pour tout réel  $x$ , on a :

- |                                                    |                                                   |                                                    |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 1. $\cos(-x) = \cos(x)$                            | 5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ | 9. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$  |
| 2. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$                      | 6. $\sin(-x) = -\sin(x)$                          | 10. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ |
| 3. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$                      | 7. $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$                     |                                                    |
| 4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ | 8. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$                      |                                                    |

**5 - Formules d'addition et de duplication :**

Pour tout réel  $a$  et  $b$ , on a :

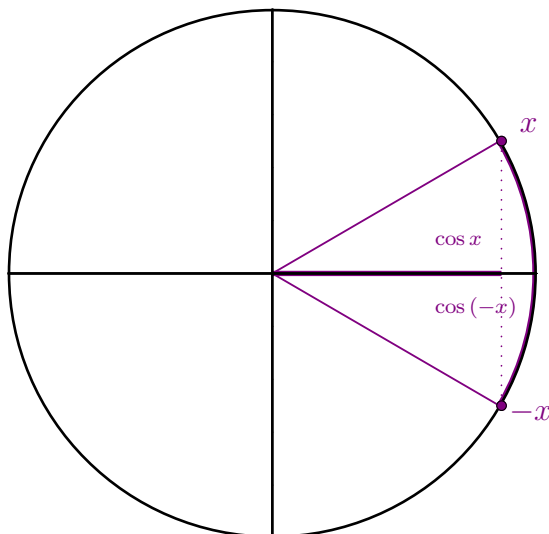
- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$  et  $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$  et  $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

**6 - Propriété :**

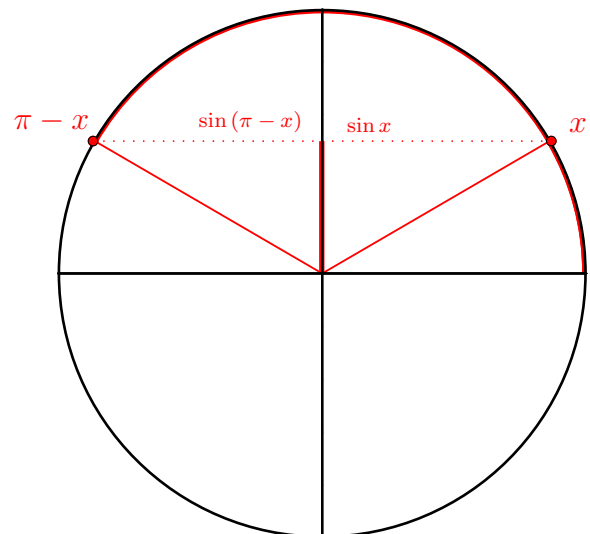
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

**IV - Les équations trigonométriques****Théorèmes**

- L'équation  $\cos(x) = \cos(a)$  d'inconnue  $x$ , a pour solutions réelles :  
 $x = a + 2k\pi$  ou  $x = -a + 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 On écrit plus simplement :  $x = a [2\pi]$  ou  $x = -a [2\pi]$ .
- L'équation  $\sin(x) = \sin(a)$  d'inconnue  $x$ , a pour solutions réelles :  
 $x = a + 2k\pi$  ou  $x = \pi - a + 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 On écrit plus simplement :  $x = a [2\pi]$  ou  $x = \pi - a [2\pi]$ .



Équation du type :  $\cos(x) = \cos(a)$ .



Équation du type :  $\sin(x) = \sin(a)$ .