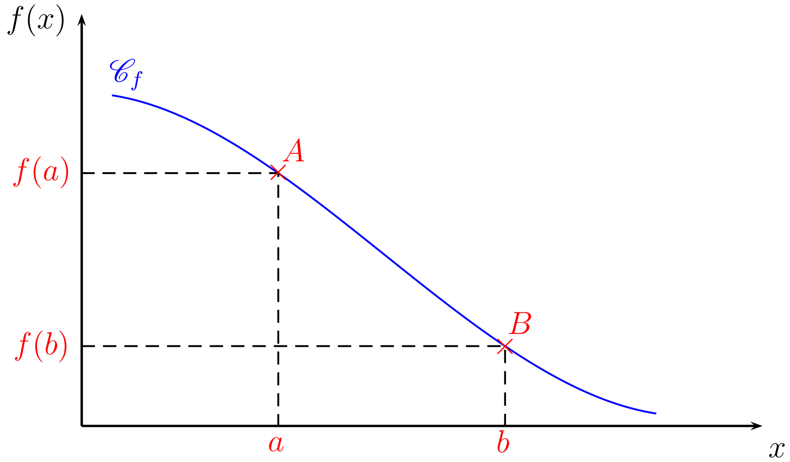
Dérivation

I- Nombre dérivé d'une fonction en un point

1 - Taux d'accroissement

Soit f la fonction définie sur un intervalle I. a et b sont deux réels distincts de I tels que $a < b$.
$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f.
On note A et B deux points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.



Définition 1 : Taux d'accroissement entre deux points

On appelle taux d'accroissement de la fonction f, entre les points a et b, le nombre : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Définition 2 : Taux d'accroissement en un point

On pose $b = a + h$, où h est un réel strictement positif.

Le taux d'accroissement de la fonction f au point a est donné par : $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

2 - Nombre dérivé

Définition 3 :

On dit que la fonction f admet une limite l, quand x tend vers a, pour exprimer que $f(x)$ peut être aussi proche de l que possible quand x est suffisamment proche de a. On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Définition 4 :

a) On appelle nombre dérivé de la fonction f au point a la limite, si elle existe, quand h tend vers 0, du taux d'accroissement τ_a.

Ce nombre dérivé, noté $f'(a)$, vérifie : $f'(a) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarque : On peut également utiliser l'expression suivante pour calculer le nombre dérivé :

$$f'(a) = \lim_{a\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

b) Si le nombre dérivé de f en a existe, on dit que la fonction f est dérivable en a.

3 - Équation de la tangente

Propriétés 1 :

a) Si f est dérivable en a, alors sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet au point $A(a\,;\,f(a))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$.

b) L'équation réduite de la tangente en $A(a\,;\,f(a))$ est donnée par : $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$.

Propriété 2 : Dérivabilité et continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Si la fonction f est dérivable en a alors elle est continue en a.

Remarque : La réciproque de cette propriété est fausse ! La fonction valeur absolue est un contre-exemple classique. En effet, la fonction $f(x) = |x|$ est continue mais pas dérivable en 0.
Les fonctions polynômes, rationnelles et irrationnelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

4 - Fonction dérivée

Définition 5 :

Soit f une fonction dérivable en tout point d'un intervalle I.
La fonction dérivée de f, notée f', est la fonction qui, à tout nombre x de l'intervalle I, associe le nombre $f'(x)$.

Propriétés 3 :

Le tableau ci-dessous rassemble les formules usuelles des dérivées.

Fonction	**Dérivée**	**Domaine de définition**
$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b, \quad a$ et $b \in \mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, \ n \in \mathbb{Z}^\star$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 1$, $\mathbb{R}^\star$ si $n \leq 1$,
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^\star$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}, \ n \in \mathbb{N}^\star$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$f(x) = \mathbb{R}^\star$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$

Propriétés 4 :

Soit $U(x)$ et $V(x)$ deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.

Remarque : Par soucis de concision, on notera tout simplement U et V au lieu de $U(x)$ et $V(x)$.

- Dérivée de la somme :
La fonction $U+V$ est dérivable sur I et on a : $(U+V)' = U' + V'$.

- Dérivée du produit par un réel :
La fonction $k \times U$ est dérivable sur I et on a : $(k \times U)' = k \times U'$.

- Dérivée du produit :
La fonction $U \times V$ est dérivable sur I et on a : $(U \times V)' = U'V + UV'$.

- Dérivée de l'inverse :
Si V est non nul sur l'intervalle I, alors $\dfrac{1}{V}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{1}{V}\right)' = -\dfrac{V'}{V^2}$.

- Dérivée du quotient :
Si V est non nul sur l'intervalle I, alors $\dfrac{U}{V}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = -\dfrac{UV' - UV'}{V^2}$.

5 - Dérivée et sens de variations

On suppose que la fonction f est dérivable sur un intervalle I.

— Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I.
— Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.
— Si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I.
— Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.
— Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.

6 - Dérivée et extremums

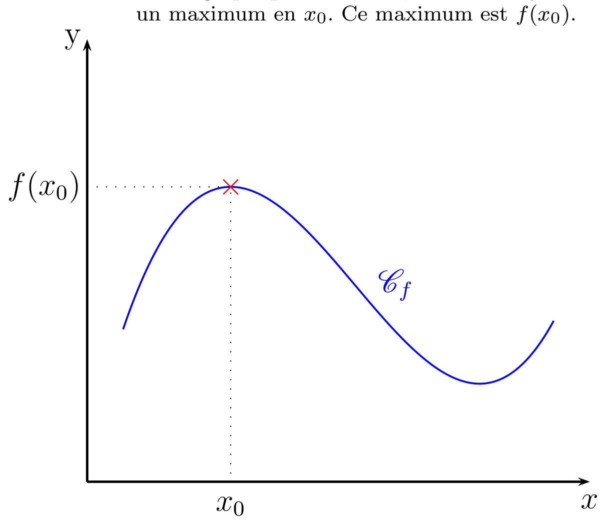
Théorème

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I. Soit J un intervalle ouvert inclus dans I et $x_0 \in J$.

a) Si la fonction f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
b) Si la fonction dérivée f' s'annule en x_0, en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0.

Remarque :
$f'(x_0) = 0$ ne suffit pas pour dire que $f(x_0)$ est un extremum local.
Par exemple, si $f(x) = x^3$, on a bien $f'(0) = 0$ mais f n'a pas d'extremum en 0.

Sur le graphique ci-dessous, la fonction f admet un maximum en x_0. Ce maximum est $f(x_0)$.



7 - Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c tel que : $f(c)=k$.

8 - Corollaire :

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c tel que : $f(c)=k$.