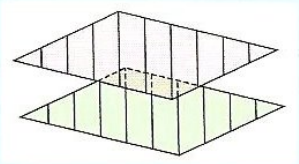
Géométrie dans l'espace

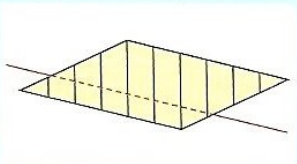
I - Droites et plans : positions relatives

définitions

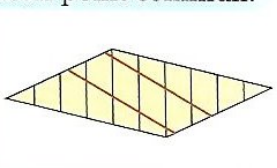
- Deux plans de l'espace sont **strictement parallèles** s'ils n'ont aucun point commun.



- Une droite et un plan de l'espace sont **strictement parallèles** s'ils n'ont aucun point commun.

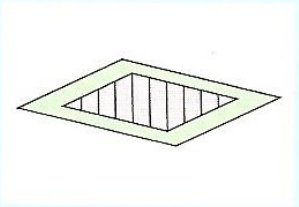


- Deux droites de l'espace sont **strictement parallèles** si elles sont coplanaires et qu'elles n'ont aucun point commun.

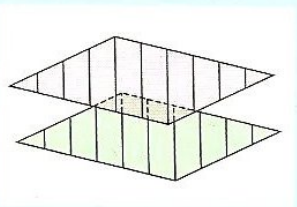


positions relatives de deux plans

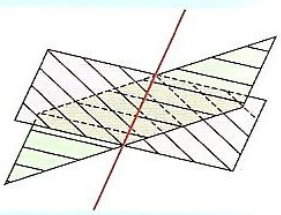
- Deux plans peuvent être **confondus.**



- Deux plans peuvent être **strictement parallèles.**

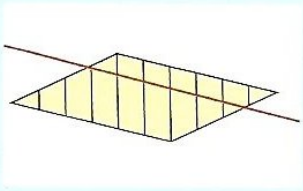


- Deux plans peuvent être **sécants selon une droite.**

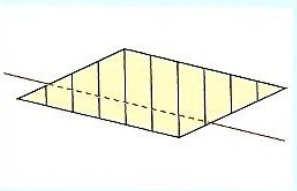


positions relatives d'une droite et d'un plan

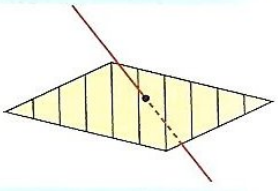
- Une droite peut être **incluse** dans un plan.



- Une droite et un plan peuvent être **strictement parallèles.**



- Une droite et un plan peuvent être **sécants en un point.**

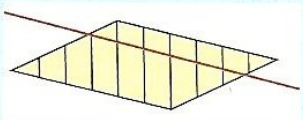


positions relatives de deux droites

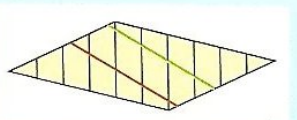
Deux droites peuvent être **coplanaires.**

On distingue alors trois cas :

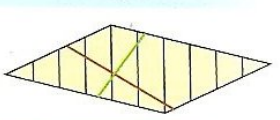
- elles sont **confondues** ;



- elles sont **strictement parallèles** ;



- elles sont **sécantes.**



II - Orthogonalité

1 - Orthogonalité de deux droites

a - Définition :
Deux droites (D) et (D') sont dites orthogonales si leurs parallèles passant par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.
On note $(D) \perp (D')$.

b - Propriété :
Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonal à l'une est orthogonale à l'autre.

Remarque :
Deux droites perpendiculaires à la même droite ne sont pas obligatoirement parallèles entres elles !

2 - Orthogonalité d'une droite et d'un plan

a - Définition :
Une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P) si elle est orthogonale à toutes droites de ce plan. On note $(D) \perp (P)$.

b - Propriété :

1. Une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
2. Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
3. Si deux droites sont orthogonales au même plan, alors elles sont parallèles.

c- Propriété :

1. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonal à l'un est orthogonale à l'autre.
2. Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

III - Géométrie vectoriel dans l'espace

1 - Caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires

Définition :
Soit A est un point de l'espace, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires.
Soit I et J les points tels que $\overrightarrow{AI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AJ} = \vec{j}$. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, avec α et $\beta \in \mathbb{R}$, est le plan (AIJ).
On dit que le plan (P) est dirigé par le couple $(\vec{i}, \vec{j})$.

2 - Vecteurs coplanaires

a - Définition :
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On dit que les trois vecteurs précédents sont coplanaires s'il existe trois réels non tous nuls α, β et γ tels que : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$.

Remarques :

- Trois points sont toujours dans un même plan (coplanaires).
- Deux vecteurs sont toujours coplanaires. En effet, on peut trouver deux représentants de deux vecteurs dans un même plan.

b - Théorème :
Les points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Remarques :

- La droite $(A\,;\,\vec{u})$ et le plan $(B\,;\,\vec{v}\,;\,\vec{w})$ sont parallèles si, et seulement si, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
- $(AB)\,//\,(CDE)$ si et seulement si, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont coplanaires.

c- Propriété et définition :
Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Alors, il existe un unique triplet de réels x, y, et z tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$.

IV - Repérage dans l'espace

1 - Repère de l'espace

a - Définition :
Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires et O un point fixe.
On peut alors munir l'espace du repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Il existe un unique triplet (x,y,z) tel que, pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
x est l'abscisse du point M, y est l'ordonnée et z est la cote.

b - Définition :
On dit que le repère est orthonormé si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de même norme : $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}||$

2 - Colinéarité et alignement dans un repère de l'espace

Théorèmes :

1. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, c'est à dire tel que $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases}$.
2. Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est de coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
3. Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

3 - Milieu, distance

Théorèmes :

1. Soit $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ et I le milieu du segment $[AB]$. On a alors : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\,;\,\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
2. Si, dans un repère orthonormé on a $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
3. Dans un repère orthonormé, la distance entre les points A et B est donnée par :
$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2 + (z_B-z_A)^2}$$

V - Repérage dans l'espace

1 - Représentation paramétriques d'une droite

a - Théorème :
Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de l'espace. On note (Δ) la droite passant par le point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur directeur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$M \in (\Delta)$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$.

b - Définition :

$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est la représentation paramétrique de la droite (Δ).

Remarque : Si $t \in \mathbb{R}^+$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ ont le même sens, et dans ce cas, on obtient une représentation paramétrique de la demi-droite d'origine A et de même sens que $\vec{u}$.

2 - Représentation paramétrique d'un plan

a - Théorème :

Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de l'espace et (P) le plan passant par le point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

$M \in (P)$ si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tels que : $\begin{cases} x = at + a't' + x_A \\ y = bt + b't' + y_A \\ z = ct + c't' + z_A \end{cases}$.

b - Définition :

$\begin{cases} x = at + a't' + x_A \\ y = bt + b't' + y_A \\ z = ct + c't' + z_A \end{cases}$, t et $t' \in \mathbb{R}$ est la représentation paramétrique du plan (P).

VI - Produit scalaire

1 - Les expressions du produit scalaire

a - Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace ainsi que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ leurs représentants respectifs à partir du même point A.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
Ainsi, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans l'espace revient à calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan.

b - Définition 1 :

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est défini par le nombre réel suivant : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2)$.
Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont les représentants respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2)$.

c - Propriétés :

Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
2. $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$;
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

d - Définition 2 : avec l'aide du projeté orthogonal

Soit A, B et C trois points de l'espace et H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). On a alors :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AH \times AC$, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.

e - Définition 3 : avec l'aide d'un angle

Soit A, B et C trois points de l'espace Alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(\hat{A})$ où $\hat{A}$ est l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Remarque : Les définitions 1, 2 et 3 sont équivalents.

2 - Orthogonalité

Propriétés :

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
2. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont dans un repère orthonormé, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

VII - Équations cartésiennes dans l'espace

1 - Vecteur normal à un plan

Définition
Un vecteur normal à un plan (P) est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à (P).

2 - Orthogonalité de deux plans

Propriété
Soit le plan (P_1) de vecteur normal $\vec{n}_1$ et (P_2) le plan de vecteur normal $\vec{n}_2$.
Alors (P_1) et (P_2) sont orthogonaux si les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux.

3 - Équation cartésienne d'un plan

a - Propriété : Caractérisation d'un plan par un point et un vecteur normal.

Si A est un point de l'espace et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul, alors l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

b - Propriété
Dans un repère orthonormé, toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ (a, b et c non tous nuls) est celle d'un plan (P) de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

4 - Équations cartésiennes d'une droite

Propriété

Si les triplets (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels, le système $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ caractérise une droite et il est appelé système d'équations cartésiennes de cette droite.