Les limites

I - Limite à l'infini :

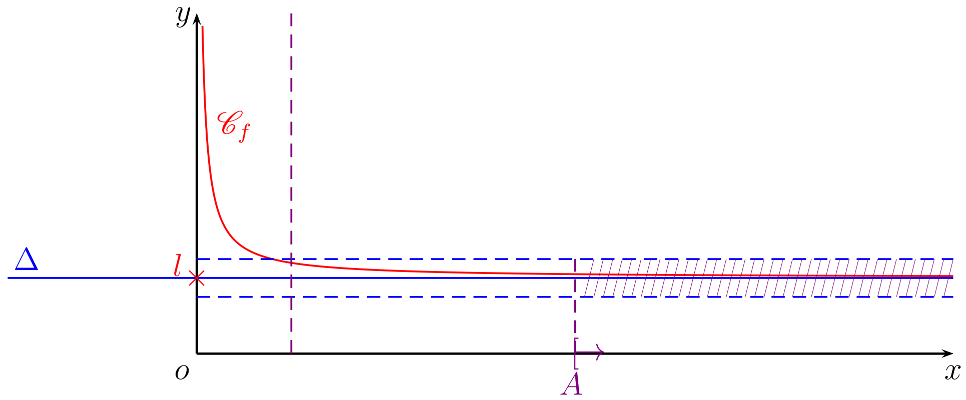
1 - Limite réelle en $+\infty$ (ou $-\infty$) :

La fonction f a pour limite le nombre l en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert I de centre l contient toutes les valeurs prises par $f(x)$ à partir d'un certain rang.
On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

On lit : la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à l.

Interprétation graphique :
Pour tout intervalle ouvert I centré en l et aussi petit soit-il, on peut trouver un réel A tel que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f restreinte à $]A; +\infty[$ soit comprise dans la partie hachurée.
Ainsi, la droite Δ d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

On définit de manière analogue la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.



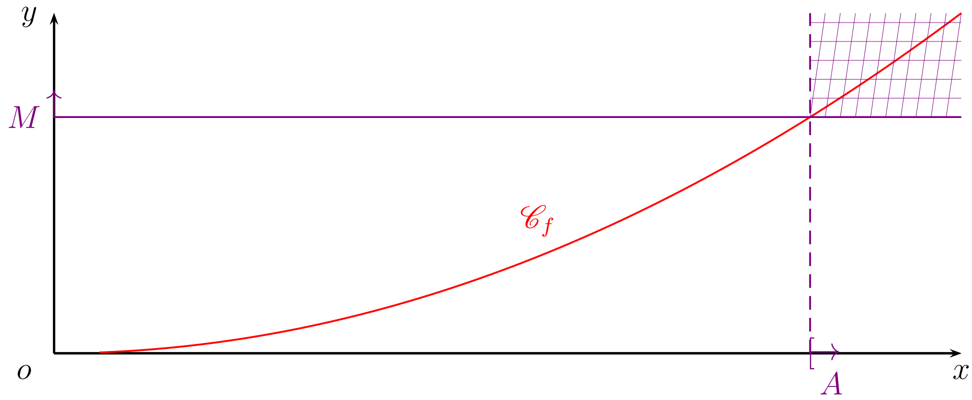
2 - Limite infinie en $+\infty$ (ou $-\infty$) :

La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs prises par $f(x)$ à partir d'un certain rang.

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Interprétation graphique :
Pour toute droite d'équation $y = M$, on peut trouver une droite d'équation $x = A$, telle que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f restreinte à $]A; +\infty[$ soit comprise dans la partie hachurée.

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



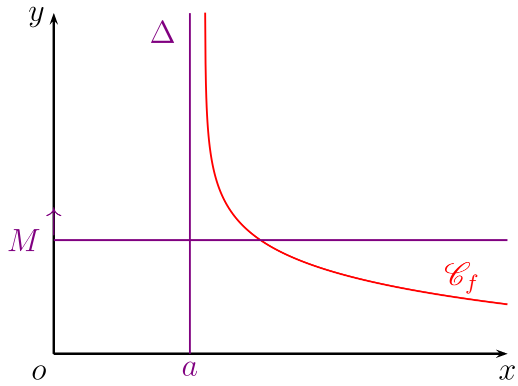
II - Limite en un réel a :

1 - Limite infinie en a :

La fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x proches de a.
On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Interprétation graphique :
Pour toute droite d'équation $y = M$, on peut trouver un intervalle $]a;b[$ tel que la courbe représentative de f restreinte à $]a;b[$ est dans la partie hachurée.
On dit que la droite Δ d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $+\infty$

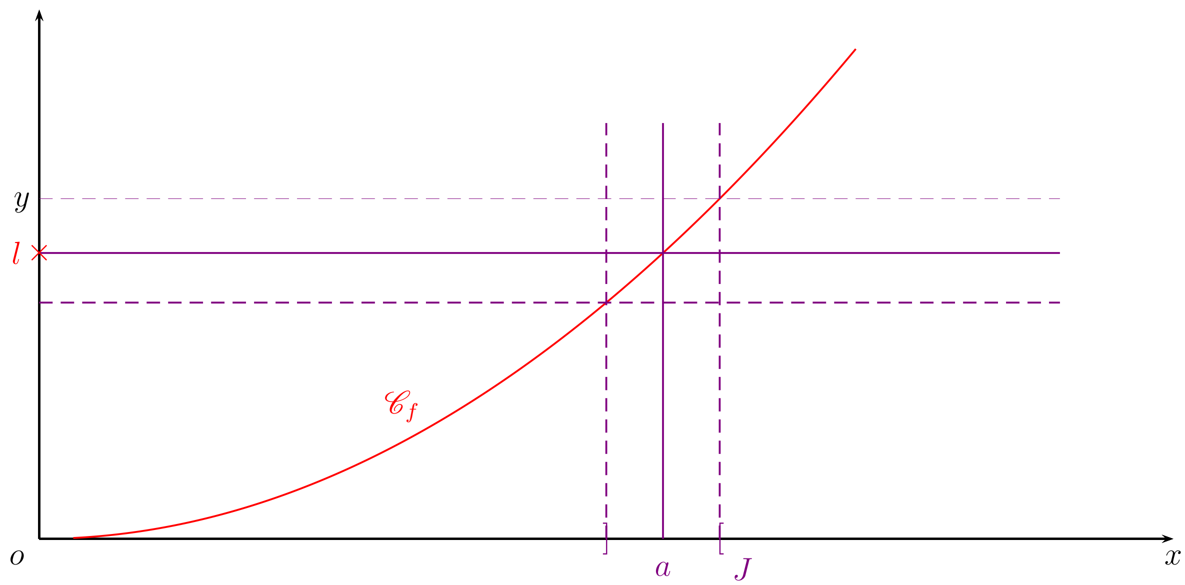


2 - Limite réelle en a :

La fonction f a pour limite l en a signifie que pour tout intervalle ouvert de centre l contient toutes les valeurs de $f(x)$ prises pour tous les x proches de a.
On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Interprétation graphique :
Quelque soit l'intervalle ouvert I centré en l, et aussi petit soit-il, on peut trouver un intervalle J centré en a tel que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f restreinte à J est dans la partie colorée.



III - Théorème de comparaison :

1 - Théorème d'encadrement :

Soient f, g et h trois fonctions définies sur $I =]b\,;+\infty[$ et l un réel.
Si pour tout x dans I, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si g et h ont la même limite l en $+\infty$ alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

2 - Théorème de comparaison à l'infini :

Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]b; +\infty[$.
Si pour tout x dans I :

1. $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
2. $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

IV - Théorème de la limite d'une fonction composée :

Soient f, g et h trois fonctions telles que $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$.
Les lettres a, b et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

V - Asymptote oblique :

La droite d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est asymptote oblique à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au voisinage de $+\infty$ signifie que

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

VI - Continuité :

1 - Continuité en un point et sur un intervalle :

Définition :

— La fonction f est continue **en un point a** de I signifie que f a une limite en a et cette imite est alors nécessairement $f(a)$.
Ainsi, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

— La fonction f est continue **sur un intervalle** I signifie que f est continue en tout point de I.

2 - Dérivabilité et continuité :

Théorème :

— Si f est dérivable en un point a de I, alors f est continue en a.

— Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

VII - Continuité des fonctions usuelles :

A partir des paragraphes précédents (6), on peut affirmer que toutes les fonctions construites algébriquement par somme, produit, quotient, composition de fonctions usuelles sont continues sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition.

Le terme "fonction usuelle" désigne les fonctions suivantes :
- racines carrées
- polynômes
- rationnelles
- cosinus et sinus

VIII - Limite à gauche, à droite :

1 - Définition : Limite à gauche

La fonction f admet l comme limite à gauche en a signifie que la restriction de f à $]-\infty; a[$ admet comme limite l en a.
On écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a^-} f = l$

2 - Définition : Limite à droite

La fonction f admet l comme limite à droite en a signifie que la restriction de f à $]a; +\infty[$ admet comme limite l en a.
On écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = l$

3 - Propriété :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I (a n'est pas une extrémité de I).
Pour que f admette une limite en a, il faut et il suffit que f admette une limite à gauche en a et une limite à droite en a et que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$.

IX - Les formes indéterminées :

En résumé :

1. $\infty - \infty$
2. $0 \times \infty$
3. $\frac{\infty}{\infty}$
4. $\frac{0}{0}$.