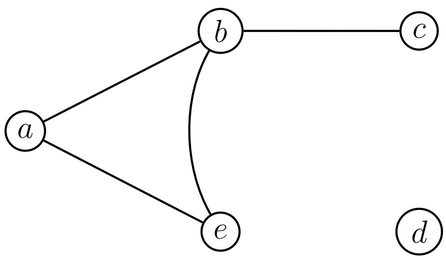
Les graphes

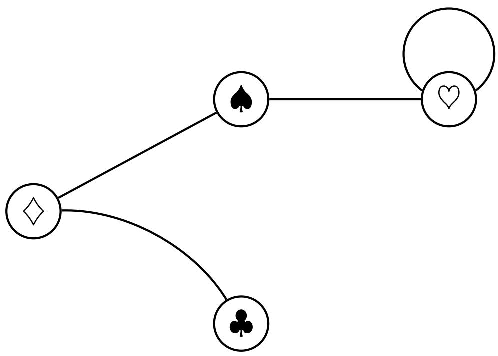
I - Notions de graphe

1 - Définitions :

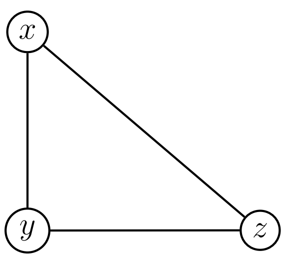
- Un **graphe** est en ensemble de **sommets** éventuellement reliés par des **arêtes**.
- L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets contenus dans ce graphe.
- Une arête reliant un sommet à lui même est une **boucle**.
- Un **graphe simple** n'admet pas de boucle et deux sommets sont reliés par une arête au maximum.
- Dans un **graphe orienté** les arêtes ont une orientation (un sens de parcours). Elles sont alors appelées **arcs**.
- Deux sommets reliés par une arête (ou un arc) sont **adjacents** (ou voisin).
- Un **graphe complet** est un graphe dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres.
- Un **graphe** est **planaire** si on peut le dessiner dans un plan sans que ses arêtes ne se croisent pas.
- Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes (ou d'arc) ayant ce sommet pour extrémité.

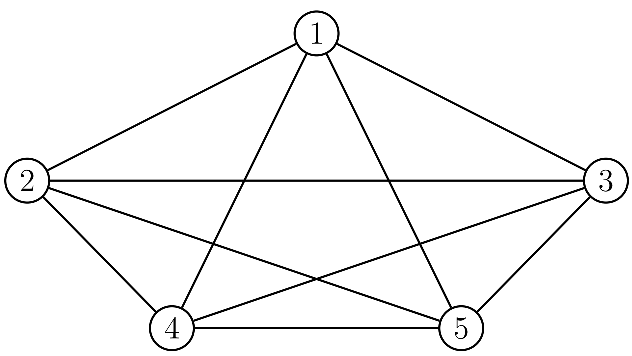
Exemple 1 :





Exemple 2 :





2 - Propriété :

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre des arêtes :

$$d = 2 \times a$$

où d est la somme des degrés (des sommets) et a est le nombre d'arêtes.

II - Les chaînes

1 - Définitions :

Dans un graphe non orienté :

— Une **chaîne** est une suite ordonnée de sommets reliés par des arêtes.

— Une **chaîne** est **simple** si elle n'utilise pas plus d'une fois une même arête.

— Une **chaîne** est **fermée** si l'origine et l'extrémité sont confondues.

— Une **chaîne** est dite **élémentaire** si elle n'utilise pas plus d'une fois le même sommet.

— La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes de la chaîne.

— Un **cycle** est une chaîne fermée simple.

2 - Définitions :

Dans un graphe orienté :

— Un **chemin** est une suite ordonnée de sommets reliés par des arcs.

— Un **chemin** est **simple** s'il n'utilise pas plus d'une fois une même arcs.

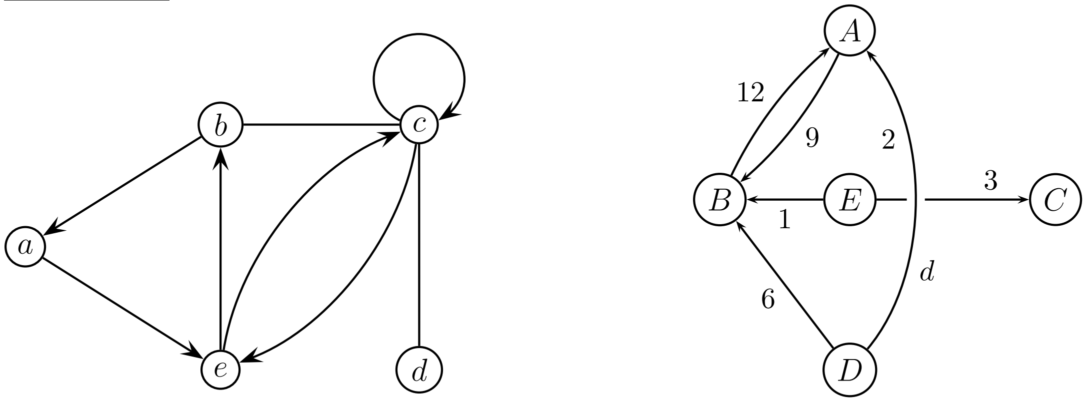
— Un **chemin** est **fermée** si l'origine et l'extrémité sont confondues.

— Un **chemin** est dit **élémentaire** s'il n'utilise pas plus d'une fois le même sommet.

— La **longueur d'un chemin** est le nombre d'arcs du chemin.

— Un **circuit** est un chemin fermé simple. On dit que c'est un **cycle orienté**.

Exemple 3 :



3 - Définitions :

— Un **graphe non orienté** est **connexe** si chaque paire de sommets est reliée par une chaîne.

— Un **graphe orienté** est **connexe** si le graphe non orienté associé est connexe.

4 - Propriété : Formule d'Euler

Soit G un graphe planaire et connexe avec s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces. On a alors la relation suivante :

$$s - a + f = 2$$

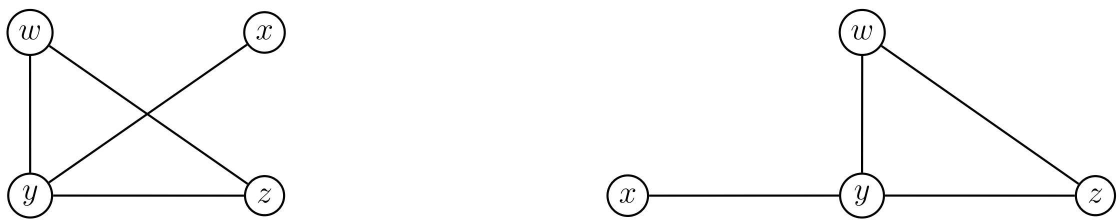
5 - Propriété :

Un graphe **complet** est toujours **connexe**.

6 - Définitions :

Deux graphes sont **isomorphes** s'ils traduisent la même situation malgré qu'ils soient dessinés différemment.

Exemple 4 : Graphes isomorphes



III - Graphe eulérien

1 - Définitions :

— Une **chaîne** est dite **eulérienne** si elle contient une fois et une seule chaque arête du graphe.

— Un **cycle** est dit **eulérien** s'il contient une fois et une seule chaque arête du graphe.

— Un **graphe eulérien** est un graphe qui possède un cycle eulérien.

Les propriétés suivantes permettront de déterminer si un graphe admet une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

2 - Propriétés :

— Un graphe connexe admet une **chaîne eulérienne** si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
— Un graphe connexe admet un **cycle eulérien** si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.

Remarque : Les seuls graphes considérés pour cette propriété sont les graphe dans lesquels deux sommets quelconque sont reliés par une chaîne : **les graphes connexes**.

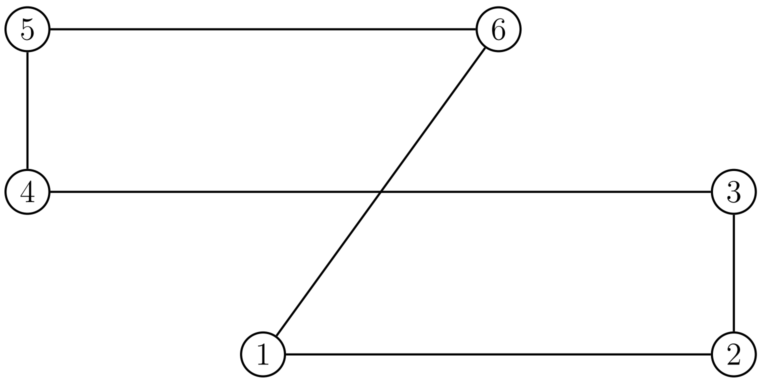
IV - Graphe hamiltonien

1 - Définitions :

— Un **cycle hamiltonien** est un cycle qui passe une fois et une seule fois par chaque sommet du graphe.

— Un **graphe hamiltonien** est un graphe qui possède un cycle hamiltonien.

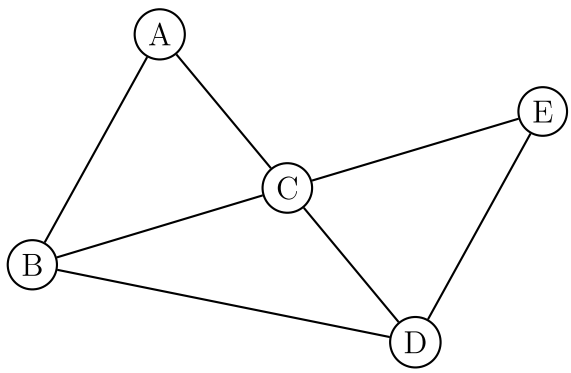
Exemple 4 : Graphes hamiltonien



V - Matrice d'adjacence associée à un graphe

1 - Exemple d'introduction :

Soit G, le graphe ci-dessous :



1. Recopier et compléter le tableau à double entrée T_1 qui représente ce graphe.
2. Le tableau T_2 contient uniquement des 0 ou des 1. On écrit 1 lorsqu'une liaison directe existe entre les deux sommets considérés et 0 sinon.
   Recopier et compléter le tableau à double entrée T_2 qui représente ce graphe.

T_1 :

A	B	C	D	E
A	0	AB		
B	BA			
C				
D				
E				

T_2 :

A	B	C	D	E
A				
B				
C				
D				
E				

2 - Définitions :

Soit G un graphe d'ordre n tel que ses sommets sont numérotés de 1 à n.

— La **matrice d'adjacence** associée à un graphe **non orienté** G est la matrice symétrique d'ordre n telle que le terme a_{ij} situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la $j^{\text{ème}}$ colonne soit égale au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

— La **matrice d'adjacence**associée à un graphe **orienté** G est la matrice symétrique d'ordre n telle que le terme a_{ij} situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la $j^{\text{ème}}$ colonne vaut 1 s'il y a un arc d'origine i et d'extrémité j et 0 sinon.

3 - Propriétés :

1. La matrice d'adjacence associée à un graphe non orienté G est symétrique par rapport à la diagonale principale. Dans une telle matrice certains termes peuvent être supérieurs à 1.
2. La matrice d'adjacence associée à un graphe orienté G composée uniquement de 0 et de 1.

4 - Propriété :

Soit G un graphe sans arête multiple, orienté ou non. D'après la définition de la matrice d'adjacence associée à G, on peut dire que le nombre 1 de la matrice est égal à la somme des degré de tous les sommets.
Le nombre de 1 est donc égal à deux fois le nombre d'arêtes ou d'arcs.

Exemple :

On donne, ci-dessous, la matrice d'adjacence B associée à un graphe G. Donner une représentation du graphe G.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

VI - Chaîne ou chemin de longueur p

1 - Définitions :

— Un **graphe pondéré non orienté** est une graphe où chaque arête est affectée d'un nombre positif, appelé poids de cette arête.

— Un **graphe pondéré orienté** est une graphe où chaque arc est affecté d'un nombre positif, appelé poids de cet arc.

2 - Propriétés :

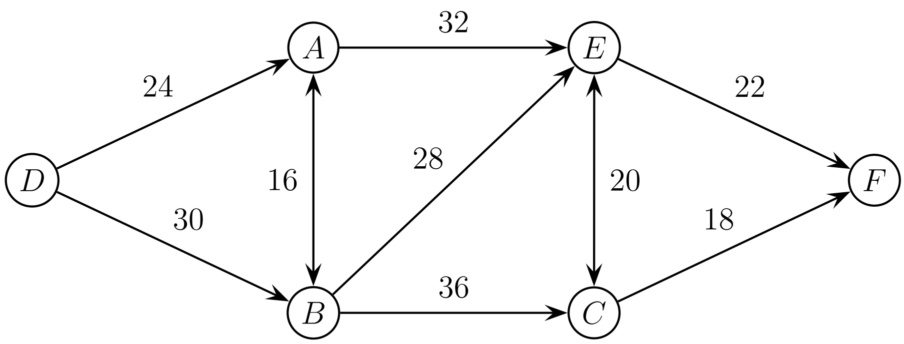
Soit M la matrice d'adjacence associée à un graphe G d'ordre n.

1. Si G est un graphe non orienté alors le terme a_{ij} de la matrice M^p, situé à l'intersection de la i^{me} ligne et de la j^{me} colonne, est égal au nombre de chaîne de longueur p reliant i et j.
2. Si G est un graphe orienté alors le terme a_{ij} de la matrice M^p, situé à l'intersection de la i^{me} ligne et de la j^{me} colonne, est égal au nombre de chemins de longueur p reliant i et j.

Exemple d'application 1 :

Un office de tourisme propose un circuit de randonnée en moyenne montagne.
Ce circuit est modélisé par le graphe G donné plus bas.

1. Les points D et F sont respectivement le début et la fin du circuit de randonnée.
2. Chaque étape, prévue pour une journée, va d'un sommet à un autre sommet.
3. Pour des raisons de sécurité certain parcours sont à sens unique.
4. Les longueurs des étapes, exprimées en km, sont indiquées sur le graphe.



Partie A :

1. (a) Quelle est la durée minimale, en jours, d'une randonnée ?
   (b) Citer toutes les randonnées et indiquer celle dont la distance totale est la plus courte ?
2. Déterminer toutes les randonnées de 4 jours.
3. Énora dispose de 5 jours pour faire une randonnée.
   Quel est le parcours le plus court que peut lui proposer l'office de tourisme ?

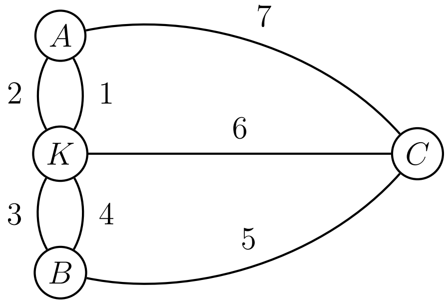
Partie B :

1. Écrire la matrice carré M associée au graphe G en respectant cet ordre : D, A, B, C, E, F.
   Cette matrice M est formée de 0 et de 1.

   On écrit 1 entre un sommet X et un sommet Y si le parcours de X à Y est possible et 0 sinon.
2. Calculer M^2, M^3, M^4 et M^5.
3. (a) Comparer le nombre situé à droite de la $1^{\text{ère}}$ ligne de M^3 et le nombre de randonnées de D à F en 3 étapes.
   (b) Comparer le nombre situé à droite de la $1^{\text{ère}}$ ligne de M^4 et le nombre de randonnées de D à F en 4 étapes.
   (c) Comparer le nombre situé à droite de la $1^{\text{ère}}$ ligne de M^5 et le nombre de randonnées de D à F en 5 étapes.

Exemple d'application 2 : Ponts de Königsberg

On considère le graphe modélisant les 7 ponts de Konigberg. Les arêtes sont numérotées de 1 à 7.



1. Déterminer le nombre de parcours permettant d'aller de A à A, de A à B, de A à C et de A à K en franchissant 2 ponts.
2. Déterminer la matrice E^2 où E est la matrice d'adjacence associée au graphe représentant les 7 ponts de Königsberg. Que remarque-t-on ?

VII - Algorithme d'optimisation :

1 - Définitions :

1. Le **poids d'une chaîne** d'un graphe pondéré est la somme des poids des arêtes qui la composent.
2. Le **poids d'un chemin** d'un graphe pondéré est la somme des poids des arcs qui le composent.
3. La **plus courte chaîne** entre deux sommets est, parmi toutes les chaînes qui les relient, la chaine de poids minimal
4. Le **plus court chemin** entre deux sommets est, parmi touts les chemins qui les relient, le chemin de poids minimal.

2 - Algorithme de Dijkstra :

Dans un graphe G, on note D le sommet de départ et A le sommet d'arrivé.

1 - Initialisation :
ÉTAPE 1 : Le sommet d'origine D est affecté du poids 0 et on attribue provisoirement un poids ∞ (infini) aux autres sommets

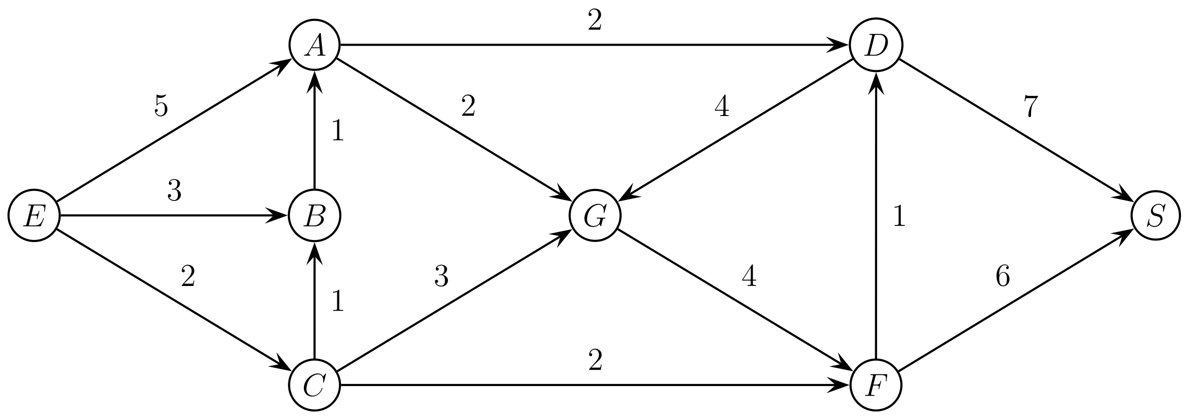
2 - Répéter les étapes suivantes tant que le sommet A n'est pas affecté d'un poids définitif :
ÉTAPE 2 : Parmi les sommets dont le poids n'est pas définitivement fixé choisir le sommet X de poids minimal.
Marquer définitivement ce sommet X affecté de sont poids

ÉTAPE 3 : Pour tous les sommets Y qui ne sont pas définitivement marqués, adjacents au dernier sommet fixé :
— Calculer le somme S du poids de X et du poids de l'arête reliant X et Y.
— Si la somme S est inférieure au poids provisoirement affecté au sommet Y, affecter provisoirement à Y le nouveau poids S et indiquer entre parenthèse le sommet X.

3 - Quand le sommet A est définitivement marqué :
Le plus court chemin de D à A s'obtient en écrivant de gauche à droite le parcours obtenu par l'algorithme.

Exemple d'application 1 :

Déterminer le plus court chemin partant de E à S.



Correction :

E	A	B	C	D	F	G	S	Fixé
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\times$	(5,E)	(3,E)	(2,E)	∞	∞	∞	∞	C
	(5,E)	(3,E)	$\times$	∞	(4,C)	(5,C)	∞	B
	(4,B)	$\times$		∞	(4,C)	(5,C)	∞	F
	(4,B)			(5,F)	$\times$	(5,C)	(10,F)	A
	$\times$			(5,F)		(5,C)	(10,F)	G
				(5,F)		$\times$	(10,F)	D
				$\times$			(10,F)	S
							$\times$	

Grâce à l'algorithme de Dijkstra, on obtient : S - F - C - E.

Ainsi, le plus court chemin partant du sommet E au sommet S est : E - C - F - S.

VIII - Coloration de graphes

1 - Définition :

Colorier les sommets d'un graphe G non orienté, c'est leur attribuer une couleur de façon à ce que deux sommets adjacents ne soient pas coloriés de la même couleur.

Le nombre minimal de couleurs nécessaire est le **nombre chromatique** du graphe, noté $\gamma(G)$.

2 - Théorème :

a) Le nombre chromatique d'un graphe complet est égal à l'ordre du graphe.
b) Soit D le degré maximal des sommets d'une graphe G. On a alors :

$$\gamma(G) \leqslant 1 + D$$

.

c) Soit p l'ordre d'un sous-graphe complet, d'ordre maximal, contenu dans un graphe G. On a alors :

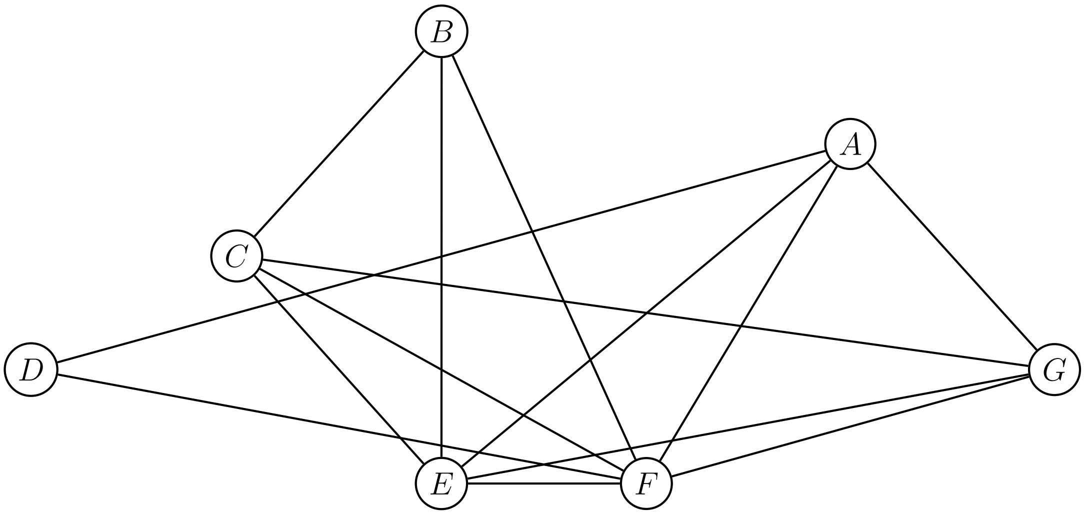
$$\gamma(G) \geqslant p$$

3 - Définition :

Dans le cas du coloriage d'un graphe, un **algorithme de glouton** est un algorithme qui fixe, au fur et à mesure de son exécution les couleur des sommets du graphe sans jamais revenir sur les choix antérieurs.

Remarque :
L'algorithme de Glouton a pour avantage d'être simple à mettre en œuvre. Mais il est important de noter que cet algorithme ne donne pas toujours la solution optimal. Dans notre cas, il ne fournit pas nécessairement le nombre chromatique $\gamma(G)$ d'un graphe G.

Exemple d'application 1 :



1. Déterminer un sous-graphe complet d'ordre maximal du graphe ci-dessus.
2. Donner un encadrement du nombre chromatique du graphe.

Correction :

1. Un sous graphe complet d'ordre maximal $p = 4$ est : B - C - E - F
2. D'après le théorème et la question 1., le nombre chromatique du graphe est supérieur ou égal à 4 : $\gamma \geqslant 4$.

   Utilisons le tableau de degré des sommets du graphe pour déterminer le sommet de degré maximal.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	4	3	4	2	5	6	4

   Le sommet F est le sommet de degré maximal égale à 6. Ainsi, $\gamma \leqslant 6 + 1 \Longrightarrow \gamma \leqslant 7$.

   En conclusion, un encadrement du nombre chromatique du graphe est donné par :

   $$4 \leqslant \gamma \leqslant 7.$$

4 - Algorithme de Welsh et Powel (ou de Glouton) :

ÉTAPE 1 :
On liste les sommets par ordre décroissant des degrés. On peut avoir plusieurs possibilités lorsqu'il y a des sommets de même degré.

ÉTAPE 2 :
On attribue une couleur c_1 au premier sommet de la liste, et on attribue cette même couleur aux sommets qui ne lui sont pas adjacents.

ÉTAPE 3 :
On attribue une couleur c_2 au premier sommet non colorié de la liste et on recommence l'*ÉTAPE 2* jusqu'à ce que tous les sommets soit coloriés.

Exemple d'application 2 :

Déterminons le nombre chromatique du graphe donné dans ***Exemple d'application***. 1.

ÉTAPE 1 :
Une liste possible : $F - E - C - A - G - B - D$

ÉTAPE 2 :
On attribue une couleur c_1 au sommet F uniquement puisque tous les sommets lui sont adjacents.

ÉTAPE 3 :
- On sélectionne le deuxième sommet non colorié de la liste (Voir *Étape 1*) et on attribue une couleur c_2 aux sommets E et D.
- On sélectionne le troisième sommet non colorié de la liste (Voir *Étape 1* et on attribue une couleur c_3 aux sommets C et A.
- On sélectionne le quatrième sommet non colorié de la liste (Voir *Étape 1*) et on attribue une couleur c_4 aux sommets G et B.

On obtient au final un coloriage du graphe en 4 couleurs. Donc $\gamma \leq 4$.

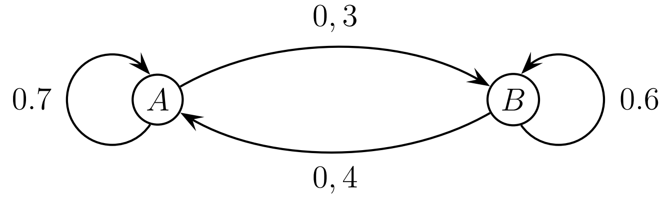
On a montré dans la question 2., de l'*exemple d'application 1*, que : $4 \leqslant \gamma \leqslant 7$. On en déduit alors que le nombre chromatique du graphe est égale à 4.

IX - Graphe probabiliste

1 - Définition : Graphe probabiliste

Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré tel que :
- Ses sommets sont les états possibles du système.
- Un arc $i \to j$ est pondéré par p_{ij}, qui est la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j à l'étape $n+1$, sachant que l'on est dans l'état i à l'étape n.

Exemple 1 :



Remarque : La somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

2 - Définition : Matrice de transition

Une **matrice de transition** associée à un graphe probabiliste d'ordre n est une matrice carré $n \times n$.

Le terme p_{ij} a pour valeur le poids de l'arc $i \to j$ si cet arc existe, 0 sinon.

3 - Propriété :

La somme des éléments de chaque ligne d'une matrice de transition est égales à 1.

Exemple 2 :
Par exemple, la matrice de transition M associée au graphe probabiliste donné précédemment est :

$$B = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

4 - Définition : État probabiliste

L'**état probabiliste** d'un système est une loi de probabilité définie sur l'ensemble des états possibles. Cette loi sera représentée par une matrice ligne.

L'état probabiliste à l'étape n est une matrice ligne de la forme $P_n = [a_n \quad b_n]$ pour deux états ou $P_n = [a_n \;\; b_n \;\; c_n]$ pour trois états.

5 - Propriété :

Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste, P_0 l'état probabiliste initial, P_n l'état probabiliste à l'étape n et P_{n+1} l'état probabiliste à l'étape $n+1$.

On a, pour tout entier n, $P_{n+1} = P_n\, M$.

On en déduit les relations suivantes

n	Relation entre P_{n+1} et P_n	Relation entre P_{n+1} et P_0
$n = 0$	$P_1 = P_0\, M$	$P_1 = P_0\, M$
$n = 1$	$P_2 = P_1\, M$	$P_2 = P_0\, M^2$
$n = 2$	$P_3 = P_2\, M$	$P_3 = P_0\, M^3$

6 - Définition : État stable

Un **état probabiliste** P est **stable** si $P = P\,M$, où M est la matrice de transition associée au graphe.