Les matrices

Application 1 :
Deux copains, Yann et Erwan achètent des chemises et des pantalons en solde. Un magasin fait une remise de 20 % sur les chemises et une remise de 40 % sur les pantalons (prix en euros).
Yann a acheté deux chemises et un pantalon pour 128 euros. Erwan lui a acheté une chemise et trois pantalons pour 184 euros. Déterminer les prix, avant les soldes, d'une chemise et d'un pantalon.

Application 2 :
On donne trois points A(1 ;6), B(3 ;8) et C(0 ;2). Trouver la fonction f du second degré telle que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ passe par les points A, B et C.

1- Définition

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombre appelé coefficients (ou terme, ou éléments) de la matrice.

Si la matrice comporte n lignes et p colonnes on dit que la matrice et de dimension $n \times p$

Exemples de matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 19 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 20 \\ 19 & 7 & 4 & 5 \\ -8 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2 - Égalité de deux matrices

Définition

Deux matrices A et B sont égales si elles ont la même dimension et si chaque élément de A est égal à l'élément correspondant de B.

Exemple

Trouvez x, y et z pour que les matrices suivantes soient égales : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ \sqrt{y} & z^3 \end{bmatrix}$.

3 - Addition de matrices

Définition :

La matrice somme de deux matrice A et B de même dimension est la matrice obtenue en ajoutant à chaque élément de A l'élément de B qui lui correspond.
L'addition de plusieurs matrices est aussi possible si ces dernières ont les mêmes dimensions.

Application 3

Ci-dessous les moyennes trimestrielles de trois élèves d'une classe de terminale ES dans trois disciplines (Math - Philosophie - SES).

	Trimestre 1		
	Math	Philo	SES
Alix	13	12	13
Briac	16	10	12
Carole	12	8	12

	Trimestre 2		
	Math	Philo	SES
Alix	15	13	11
Briac	15	10	10
Carole	14	10	12

x

	Trimestre 3		
	Math	Philo	SES
Alix	14	14	12
Briac	17	13	14
Carole	16	12	15

Calculer le total des trois moyennes trimestrielles, pour chaque élève et dans chacune des matières.

4 - La matrice transposée

Définition :

LA matrice transposée d'une matrice A est la matrice notée ${}^tA$ (parfois notée A^T ou A^t) obtenue en échangeant les lignes et les colonnes.

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

5- Multiplication d'une matrice par un réel

a - Définition :

Le produit d'une matrice A par un réel k est la matrice kA obtenue en multipliant tous les termes de A par le réel k.

b - Propriété :

Pour toutes matrices A et B de même dimension et pour tout réel k on a $k(A+B) = kA + kB$

Exemple 1 :

Calculer la moyenne annuelle, pour chaque élève et dans chacune des matières (Application 3).

Exemple 2 :

La matrice A définie par $A = \begin{bmatrix} 25 \\ 40 \\ 32 \end{bmatrix}$ est une matrice de pris de vente H.T.

On suppose que le taux de la TVA est de 20%. Déterminer la matrice B des pris de vente T.T.C.

6 - Multiplication de deux matrices

Soit $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ deux matrices de dimensions respectives (l_1, c_1) et (l_2, c_2).
Le produit des matrices A et B n'est possible que si c_1 est égale à l_2 $(c_1 = l_2)$.

En résumé, le produit d'une matrice par une autre est possible seulement si le nombre de colonne de la première matrice est le même que le nombre de ligne de la deuxième matrice.

a - Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_p \end{pmatrix}$ une matrice ligne et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne.

Le produit de A et B noté AB est la matrice 1×1 dont le coefficient est :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p$$

Exemple :

Le produit de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est égal à :

$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times (-1) + 2 \times 4 + 6 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \end{pmatrix}$

b - Multiplication d'une matrice par une matrice colonne

Exemple :

Le produit de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ et de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ est égale à :

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 + 8 \times 9 \\ 9 \times 1 + 7 \times 3 + 3 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 79 \\ 57 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c - Cas général :

Exemple :

Le produit de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ et de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ est égale à :

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 + 8 \times 9 & 1 \times 0 + 2 \times 2 + 8 \times 7 \\ 9 \times 1 + 7 \times 3 + 3 \times 9 & 9 \times 0 + 7 \times 2 + 3 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 79 & 60 \\ 57 & 35 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7 - Inverse d'une matrice

Définition :

Soit A une matrice carrée. S'il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I$ (où I est une matrice identité), cette matrice B est appelée matrice inverse de A.
On note $B = A^{-1}$ et on dit dans ce cas que la matrice A est inversible.

Exemple :

Considérons les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

Montrer que B est ma matrice inverse de A (c'est à dire que $B = A^{-1}$).

Exemple :

Calculer le produit de la matrice identité d'ordre 3 appelée I et la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 12 & 0 & 11 \\ -2 & 9 & 14 \end{pmatrix}$

Que constatez-vous ?

8 - Résolution d'un système par calcul matriciel

a - Définition : Systèmes d'équations linéaires

On appelle système de n équations linéaires à p inconnues $(x_1, x_2, ..., x_p)$ le système :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Remarque : Dans ce cours, le nombre d'équations sera toujours égale au nombre d'inconnues. C'est à dire que $n = p$.

b - Écriture matricielle :

On peut écrire le système (S) sous forme d'écriture matricielle.
On définie d'abord les trois matrices A_{np}, X_p et B_n par :

$$A_{np} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + ... + a_{1p} \\ a_{21} + a_{22} + ... + a_{2p} \\ ... \\ a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{np} \end{pmatrix}, X_p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } B_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'"*écriture matriciel* du système (S) est la suivante :

$$A_{np} \times X_p = B_n$$

c - Méthodes de résolution :

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre un système d'équations linéaires. Nous détaillerons deux méthodes qui suffisent largement pour toute la suite.

Méthode 1 : Pivot de Gauss

La méthode de Gauss consiste à transformer un système d'équations linéaire en un autre système équivalant mais bine plus facile à résoudre.

Exemple :

$$(S)\begin{cases} x+2y+2z=2 & (L_1) \\ x+3y-2z=-1 & (L_2) \\ 3x+5y+8z=8 & (L_3) \end{cases}$$

La première étape consiste à conserver la ligne L_1, qui nous servira de pivot pour l'élimination des inconnues x se trouvant dans les lignes suivantes(L_2 et L_3).
Une fois que les inconnues des ligne L_2 et L_3 ont été éliminées, on considère cette fois-ci la ligne L_2 comme pivot pour éliminer l'inconnue y de la ligne L_3.

Après cette deuxième étape, la ligne L_3 se résume à une équation à une inconnue (z) qui est facile à résoudre. Pour trouver l'inconnue y, on utilise la deuxième équation où l'on remplace z par sa valeur. Enfin, pour trouver la dernière inconnue s, on utilise la ligne L_1 où l'on remplace y et z par les valeurs trouvées précédemment.

Méthode 2 : Inversion matricielle

La méthode par inversion matricielle a pour objectif de résoudre le système (S).
Pour cela, on utilise l'écriture matricielle :

$$A_{np} \times X_p = B_n$$

Considérons que la matrice A_{np} est une matrice carrée. C'est à dire que $n = p$. Dans ce cas, la matrice colonne des inconnues est de dimension $n \times 1$. On obtient donc :

$$A_{nn} \times X_n = B_n$$

Pour simplifier l'écriture, notons simplement :

$$A \times X = B$$

Si la matrice inverse existe, on multiplie à gauche par A^{-1} :

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$$

Comme $A^{-1} \times A = I$, on obtient :

$$I \times X = A^{-1} \times B$$

Et comme $I \times X = X$, on obtient finalement les valeurs de la matrice X des valeurs inconnues :

$$X = A^{-1} \times B$$

Exemple
Utiliser l'exemple de la méthode 1.