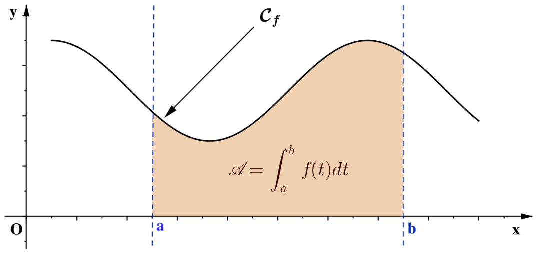
Intégration

I - Définitions

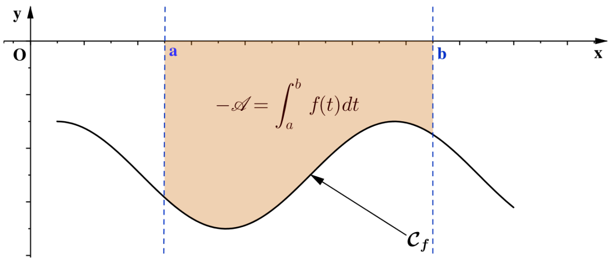
1- Fonction positive :

Soit f une fonction **continue, à valeurs positives**, sur un intervalle [a,b] et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.
Le nombre **réel positif** noté $\int_a^b f(t)dt$ (intégrale de a à b de la fonction f) désigne l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



2- Fonction négative :

Soit f une fonction **continue, à valeurs négatives**, sur un intervalle [a,b] et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.
Le nombre **réel négatif** noté $\int_a^b f(t)dt$ désigne l'opposé de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3- Fonction quelconque :

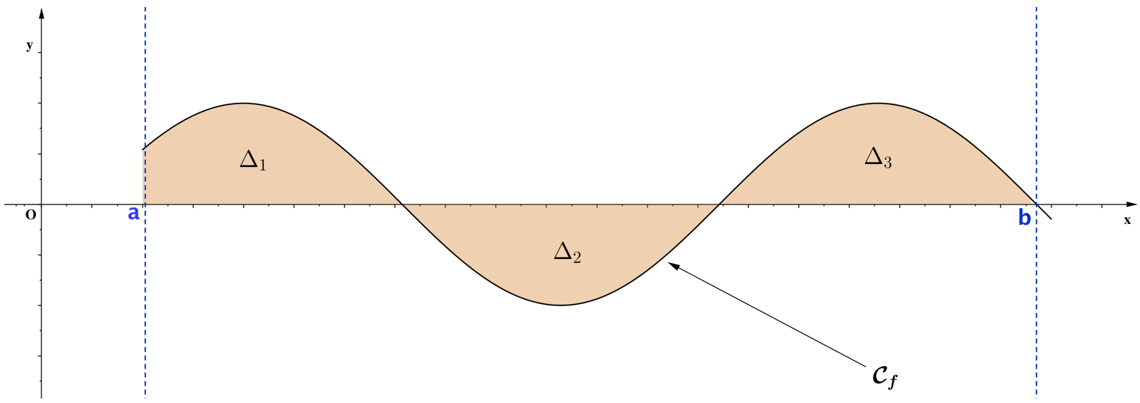
Soit f une fonction **continue** définie sur un intervalle [a,b].
On suppose qu'il existe un nombre fini d'intervalles inclus dans $[a, b]$ où f est à valeurs positives et un nombre fini d'intervalles où elle est à valeurs négatives.

Le nombre réel $\int_a^b f(t)dt$ désigne **l'aire algébrique** du domaine limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Sur le graphique ci-dessus :

$\mathscr{A}_1$: l'aire du domaine Δ_1 ;
$\mathscr{A}_2$: l'aire du domaine Δ_2 ;
$\mathscr{A}_3$: l'aire du domaine Δ_3.

On a donc :

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(t)dt = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 \qquad (avec\ \ a < b)$$



II - Relation de Chasles

La relation de Chasles est donnée par l'égalité suivante :

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

III - Propriété de linéarité de l'intégrale

Propriété 1 :

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Cette propriété se généralise à une somme de plusieurs fonctions.

Propriété 2 :

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$.

IV - Valeur moyenne

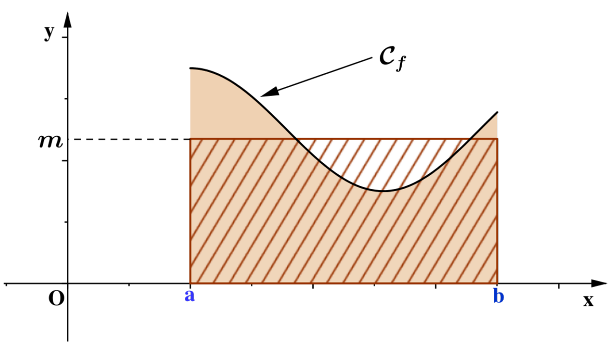
Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux nombres réels distincts de l'intervalle I. Alors, il existe un réel c entre a et b tel que $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$.

La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle [a,b] est donnée par : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

Le nombre réel m est la hauteur du rectangle (hachuré) ayant la même aire que $\mathscr{A} = \int_a^b f(t)dt$.

L'exemple ci-dessous illustre le cas d'une fonction positive ($f \geq 0$) définie $[a;b]$.



La surface hachurée a pour aire : $\mathscr{A} = m(b-a) = \int_a^b f(t)dt$.

V - Inégalité entre intégrales

1- Comparaison :

Si $a < b$ et $f \leq g$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

2- Encadrement :

Si $a < b$ et $h \leq f \leq g$, alors :

$$\int_a^b h(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

VI - Primitives

1- Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I, telle que pour tout x dans I, $F'(x) = f(x)$.

2- Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est une primitive de f sur I, alors f admet une infinité de primitives. Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle.

3- Primitives d'une fonction continue :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a est un réel de I.
Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ est l'unique primitive de f sur I telle que $F(a) = 0$.

VII - Calculs d'intégrale

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive quelconque de f sur I, a et b sont deux réels de I. On a alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

VIII - Calculs des primitives

1- Primitives des fonctions usuelles :

Fonction f	**Primitive F**	**Domaine de définition de** f
$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2,$	$F(x) = \frac{x^3}{3}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ \ n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et $\mathbb{R}^\star$ si $n < -1$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n},\ \ n \in \mathbb{N}^\star$	$F(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^\star$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^\star$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

2- Formules générales :

Dans chaque cas u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	**Primitive F**	**Remarques**
$u'u^n \ \ n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$u(x) \neq 0$ pour $n < -1$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$\frac{u'}{u}$	$ln(u)$	si $u > 0$
$u'e^u$	e^u	