Fonction exponentielle

I - Définition et propriétés :

1 - Définition :

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle et se note $\exp(x)$ ou e^x.

On peut résumer par :

$$\begin{array}{rccc} \exp & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

où $\exp(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x) = \exp(x)$.

2 - Propriétés :

1. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

II - Étude de la fonction exponentielle

Soit $f(x) = \exp(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)$ sa dérivée.

1 - La dérivée de la fonction $\mathbf{x \longmapsto \exp[u(x)] = e^x}$:

Soit u un fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors, $f(x) = e^{u(x)}$ admet comme dérivée la fonction : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

En particulier, si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.

2 - Tableau de variation :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

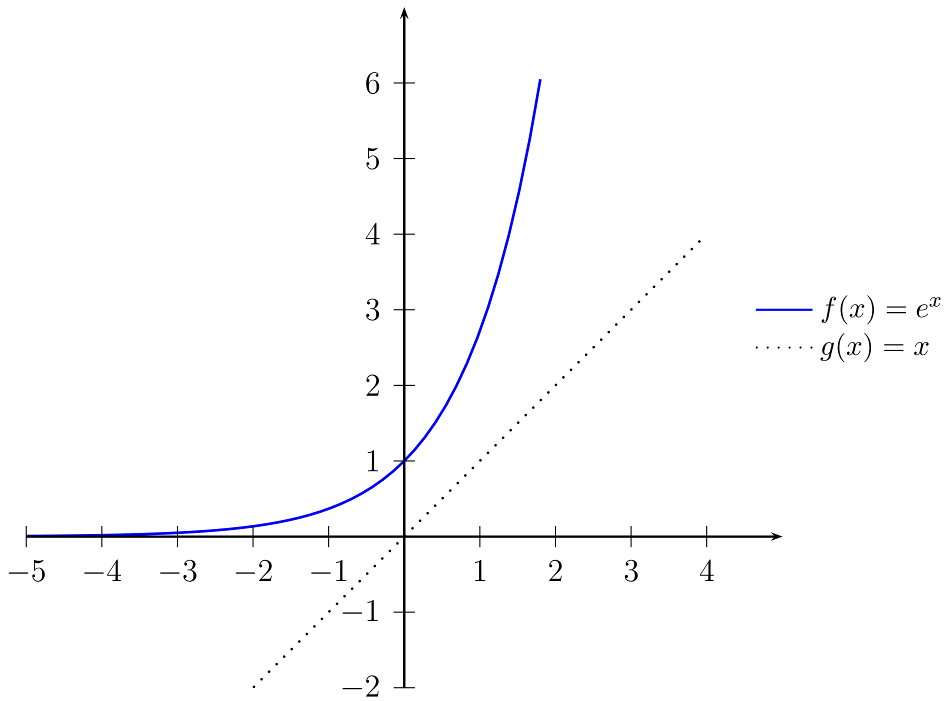
3 - Tableau de signe :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

4 - Représentation graphique :

Propriété :

On dit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe de la fonction exponentielle pour signifier que la limite de e^x en $-\infty$ est égale à 0.



5 - Propriétés :

Soit a et $b \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

1. $e^a = e^b \iff a = b$.
2. $e^a < e^b \iff a < b$.

6 - Propriété algébrique

Si a et b sont deux réels et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

1. $e^0 = 1$
2. $e^{a+b} = e^a \times e^b$;
3. $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$;
4. $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$;
5. $(e^a)^n = e^{a \times n}$;
6. $\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$.