Fonction logarithme népérien

I - Définition et propriétés :

1 - Définition :

Pour tout réel $x > 0$, l'équation $e^y = x$, d'inconnue réelle y admet une unique solution.
La fonction qui à x associe cette solution est appelée fonction logarithme népérien. On a ainsi : $y = \ln x$
On peut résumer par :

$$\begin{array}{rcl} \ln : \ ]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ln\,x \end{array} \qquad \forall x > 0, \quad e^y = x \Longleftrightarrow y = \ln x$$

2 - Propriétés :

1. $\forall x > 0,\ e^{\ln x} = x$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$.

3 - Propriétés :

1. La fonction $f(x) = \ln x$ est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. La fonction $f(x) = \ln x$ est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

II - Étude de la fonction logarithme népérien

Soit $f(x) = \ln x$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ et $f'(x)$ sa dérivée.

1 - La dérivée de la fonction $\mathbf{x \longmapsto \ln[u(x)]}$:

Soit u un fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors, $f(x) = \ln[u(x)]$ a pour dérivée la fonction : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

En particulier, si $f(x) = \ln x$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

2 - Tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$		
$f(x)$	‖	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$		$+\infty$

3 - Tableau de signe :

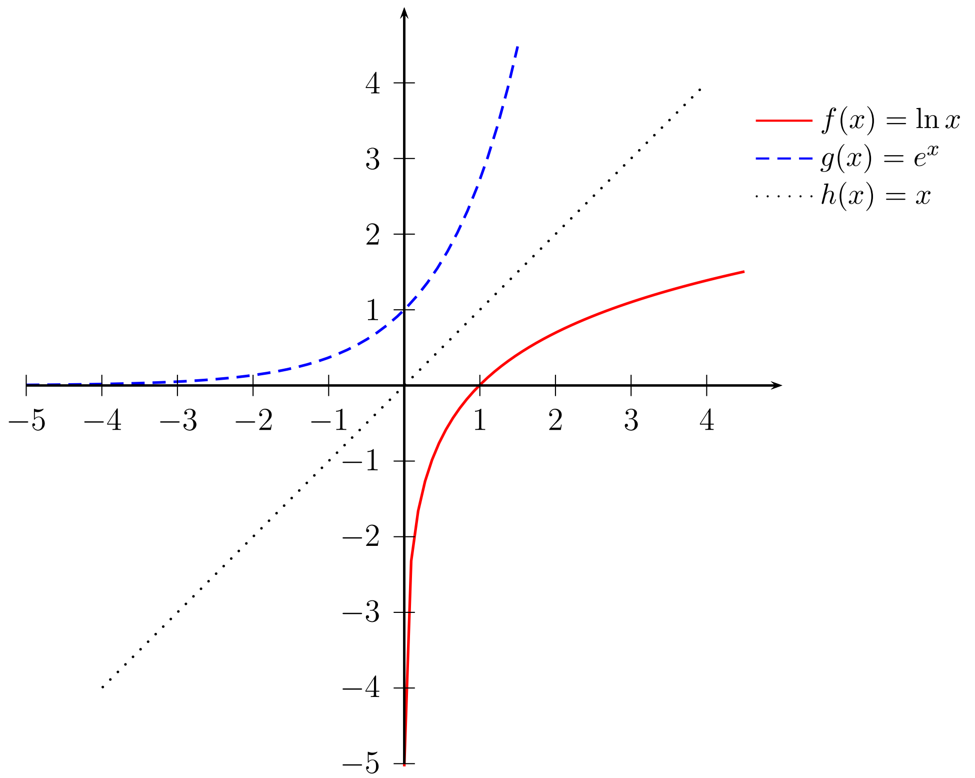
x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4 - Représentation graphique :

Propriété :

Les courbes représentatives des fonctions exponentielles et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).

Remarque : On dit que les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre.



5 - Propriétés :

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+^\star$. On a les équivalences suivantes :

1. $\ln a = \ln b \iff a = b$.
2. $\ln a < \ln b \iff a < b$.

En particulier, on a :

1. $\ln a < 0 \iff 0 < a < 1$.
2. $\ln a = 0 \iff a = 1$.
3. $\ln a > 0 \iff a > 1$.

6 - Propriété algébrique

Pour tout réel $a > 0$, $b > 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a :

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$;
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
3. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
4. $\ln(a^k) = k \times \ln(a)$;
5. $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \times \ln(a)$.