

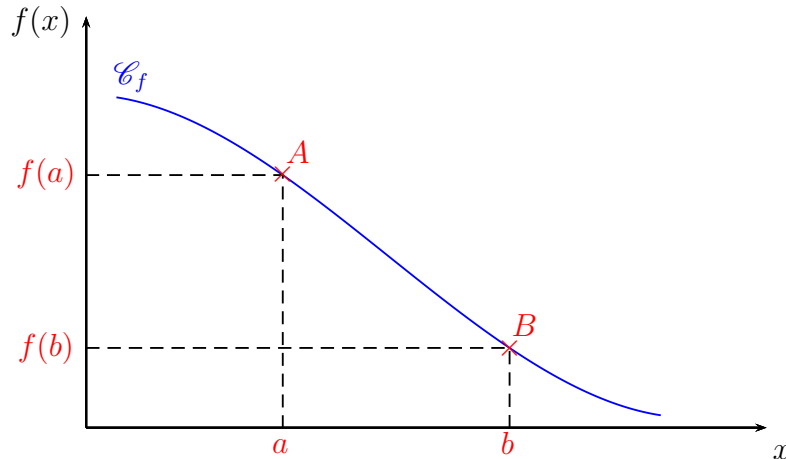
## Dérivation

### I- Nombre dérivé d'une fonction en un point

#### 1 - Taux d'accroissement

Soit  $f$  la fonction définie sur un intervalle  $I$ .  $a$  et  $b$  sont deux réels distincts de  $I$  tels que  $a < b$ .  $\mathcal{C}_f$  est la courbe représentative de la fonction  $f$ .

On note  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisses respectives  $a$  et  $b$ .



#### Définition 1 : Taux d'accroissement entre deux points

On appelle taux d'accroissement de la fonction  $f$ , entre les points  $a$  et  $b$ , le nombre :  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

#### Définition 2 : Taux d'accroissement en un point

On pose  $b = a + h$ , où  $h$  est un réel strictement positif.

Le taux d'accroissement de la fonction  $f$  au point  $a$  est donné par :  $\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

#### 2 - Nombre dérivé

##### Définition 3 :

On dit que la fonction  $f$  admet une limite  $l$ , quand  $x$  tend vers  $a$ , pour exprimer que  $f(x)$  peut être aussi proche de  $l$  que possible quand  $x$  est suffisamment proche de  $a$ . On note :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

##### Définition 4 :

- a) On appelle nombre dérivé de la fonction  $f$  au point  $a$  la limite, si elle existe, quand  $h$  tend vers 0, du taux d'accroissement  $\tau_a$ .

Ce nombre dérivé, noté  $f'(a)$ , vérifie :  $f'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .

**Remarque :** On peut également utiliser l'expression suivante pour calculer le nombre dérivé :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- b) Si le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  existe, on dit que la fonction  $f$  est dérivable en  $a$ .

**3 - Équation de la tangente****Propriétés 1 :**

a) Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  admet au point  $A(a ; f(a))$  une tangente ( $T$ ) de coefficient directeur  $f'(a)$ .

b) L'équation réduite de la tangente en  $A(a ; f(a))$  est donnée par :  $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$ .

**4 - Fonction dérivée****Définition 5 :**

Soit  $f$  une fonction dérivable en tout point d'un intervalle  $I$ .

La fonction dérivée de  $f$ , notée  $f'$ , est la fonction qui, à tout nombre  $x$  de l'intervalle  $I$ , associe le nombre  $f'(x)$ .

**Propriétés 2 :**

Le tableau ci-dessous rassemble les formules usuelles des dérivées.

| Fonction                                              | Dérivée                       | Domaine de définition                                        |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$                   | $f'(x) = 0$                   | $\mathbb{R}$                                                 |
| $f(x) = x$                                            | $f'(x) = 1$                   | $\mathbb{R}$                                                 |
| $f(x) = ax + b, \quad a \text{ et } b \in \mathbb{R}$ | $a$                           | $\mathbb{R}$                                                 |
| $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}^*$                | $f'(x) = nx^{n-1}$            | $\mathbb{R}$ si $n \geq 1$ , $\mathbb{R}^*$ si $n \leq -1$ , |
| $f(x) = \frac{1}{x}$                                  | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$      | $\mathbb{R}^*$                                               |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$      | $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$  | $f(x) = \mathbb{R}^*$                                        |
| $f(x) = \sqrt{x}$                                     | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}^+$                                               |

**Propriétés 3 :**

Soit  $U(x)$  et  $V(x)$  deux fonctions dérivables sur un même intervalle  $I$ .

**Remarque :** Par soucis de concision, on notera tout simplement  $U$  et  $V$  au lieu de  $U(x)$  et  $V(x)$ .

**- Dérivée de la somme :**

La fonction  $U + V$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $(U + V)' = U' + V'$ .

**- Dérivée du produit par un réel :**

La fonction  $k \times U$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $(k \times U)' = k \times U'$ .

**- Dérivée du produit :**

La fonction  $U \times V$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $(U \times V)' = U'V + UV'$ .

**- Dérivée de l'inverse :**

Si  $V$  est non nul sur l'intervalle  $I$ , alors  $\frac{1}{V}$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $\left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2}$ .

**- Dérivée du quotient :**

Si  $V$  est non nul sur l'intervalle  $I$ , alors  $\frac{U}{V}$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{UV' - UV'}{V^2}$ .

**5 - Dérivée et sens de variations**

On suppose que la fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ .
- Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .
- Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .
- Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

**6 - Dérivée et extremums****Théorème**

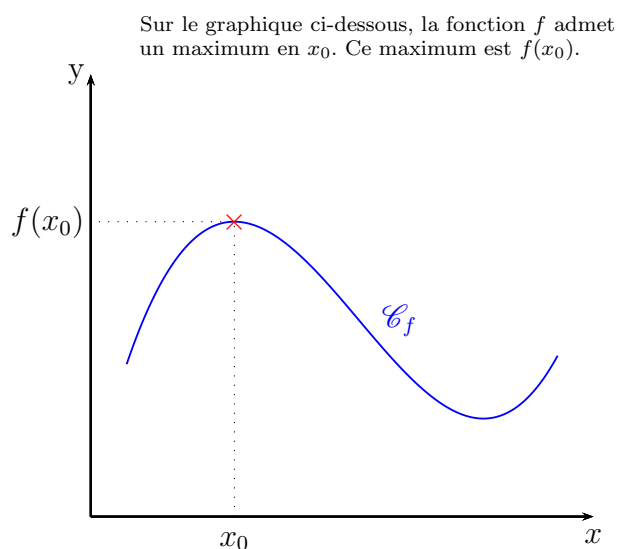
Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $I$ . Soit  $J$  un intervalle ouvert inclus dans  $I$  et  $x_0 \in J$ .

- a) Si la fonction  $f$  admet un extremum local en  $x_0$  alors  $f'(x_0) = 0$ .
- b) Si la fonction dérivée  $f'$  s'annule en  $x_0$ , en changeant de signe, alors  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ .

**Remarque :**

$f'(x_0) = 0$  ne suffit pas pour dire que  $f(x_0)$  est un extremum local.

Par exemple, si  $f(x) = x^3$ , on a bien  $f'(0) = 0$  mais  $f$  n'a pas d'extremum en 0.



**7 - Fonction continue****Définition 6 :**

Une fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  si elle est définie sur cet intervalle et si sa représentation graphique peut être tracée sans lever la main utilisée.

**Conséquence :**

Les fonctions polynômes, rationnelles et irrationnelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

**8 - Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $[a; b]$ . Pour tout  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c$  tel que :  $f(c) = k$ .

**9 - Corollaire :**

Soit  $f$  une fonction définie, continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle  $[a; b]$ . Pour tout  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un unique réel  $c$  tel que :  $f(c) = k$ .