Les fonctions de références

I - Fonction affine

1 - Définition :

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression suivante : $f(x) = ax + b$.
a est appelé **coefficient directeur**.
b est appelé **ordonnée à l'origine**.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

2 - Théorème :

— Si a est positif, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
— Si a est négatif, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Si $b = 0$, on dit que la fonction $f(x) = ax$ est linéaire. Elle passe par l'origine.

Exemple :
Donner la représentation graphique des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x - 1$
2. $f(x) = -x + 3$
3. $f(x) = 4x$

3 - Tableau de signe :

Cas 1 : Le coefficient directeur a est positif ($a > 0$)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax + b$		-	0	+	

Cas 2 : Le coefficient directeur a est négatif ($a < 0$)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax + b$		+	0	-	

4 - Tableau de variation :

Cas 1 : a est positif ($a > 0$)

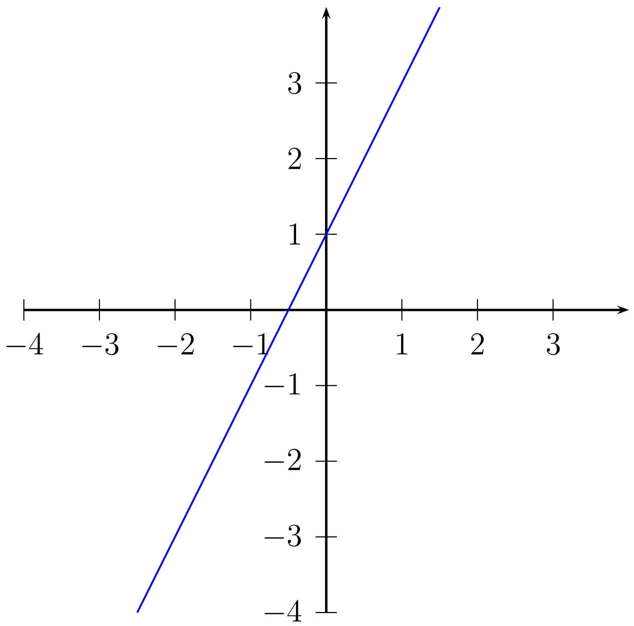
x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de $ax + b$	$\nearrow$	

Cas 2 : a est négatif ($a < 0$)

x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de $ax + b$	$\searrow$	

5 - Représentation graphique

Ci-dessous, la représentation graphique d'une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
Dans le cas présent, $a = 2$ et $b = 1$.



6 - Détermination des coefficients

- L'ordonnée à l'origine :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = ax + b$.

Comme $f(0) = a \times 0 + b = b$, la représentation graphique (la droite) de la fonction f passe par le point de coordonnées $(0\,;\,b)$. C'est en ce point que la droite coupe l'axe des ordonnées.

C'est pourquoi le paramètre b est appelé ordonnée à l'origine.

- Le coefficient directeur :

On a $f(x) = ax + b$. On peut utiliser deux méthodes pour déterminer le coefficient directeur :

1. La première méthode consiste à utiliser les coordonnées de deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Si les points A et B appartiennent à la droite alors :
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
2. La deuxième méthode est une méthode graphique.

II - Fonction carré

1 - Définition :

La **fonction carré** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression suivante : $f(x) = x^2$.

La représentation graphique de la fonction carré est une **parabole**.

2 - Propriété :

La courbe représentative (la parabole) de la fonction carré admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

3 - Propriété :

La fonction carré est :

— strictement décroissante sur $]-\infty\,; 0[$.

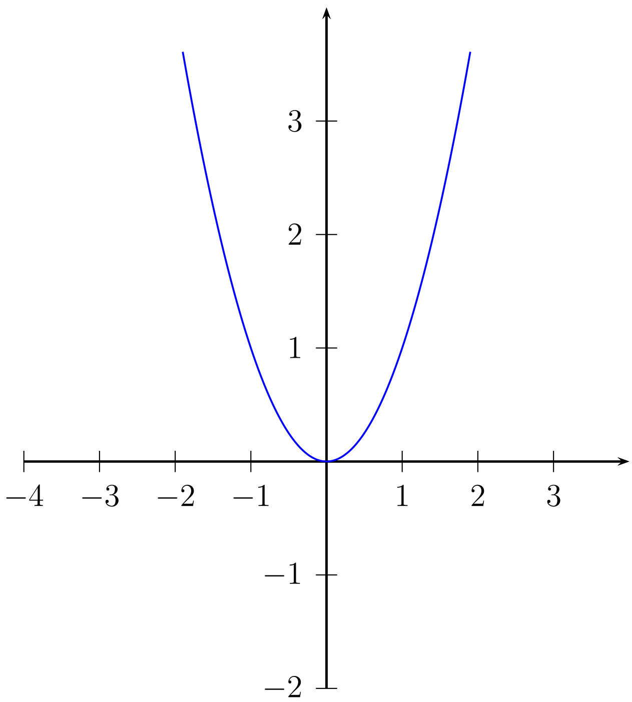
— strictement croissante sur $]0\,; +\infty[$.

4 - Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de $f(x)=x^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$

5 - Représentation graphique

Ci-dessous, la représentation graphique de la fonction carré $f(x) = x^2$.



III - Fonction homographique

1 - Définition :

Une **fonction homographique** est de la forme :

$$f(x) = \frac{ax+b}{bx+c},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.
La représentation graphique de la fonction homographique est une **hyperbole**.

2 - Propriété :

La courbe représentative (l'hyperbole) de la fonction homographique admet comme centre de symétrie le point de coordonnées $(-\frac{c}{b}\ ;\ 0)$.
Remarque : Étant donné que $-\frac{c}{b}$ est exclu de l'ensemble de définition de la fonction homographique, il n'y a donc aucun pas d'abscisse $-\frac{c}{b}$ sur l'hyperbole.

3 - Théorème :

On pose : $V = ad - bc$.

La fonction homographique est :
- strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{c}{b}\right[\cup \left]-\frac{c}{b}\,;\,+\infty\right[$ si V est strictement positif ($V > 0$).
- strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{c}{b}\right[\cup \left]-\frac{c}{b}\,;\,+\infty\right[$ si V est strictement négatif ($V < 0$).

4 - Tableau de variation :

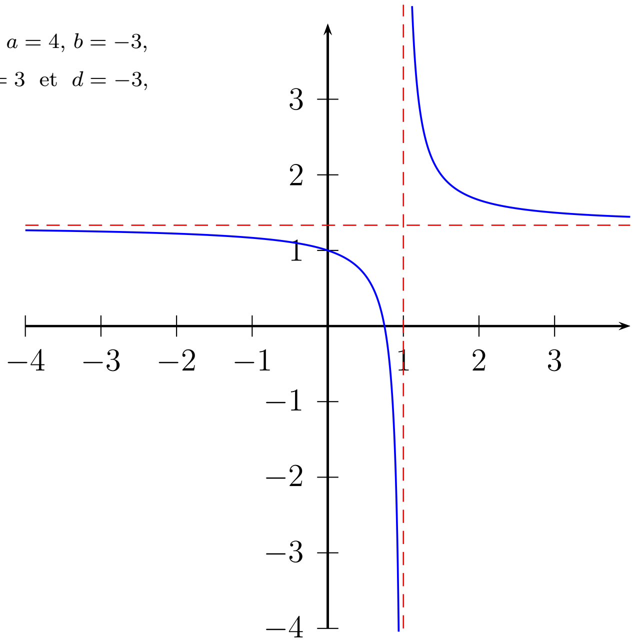
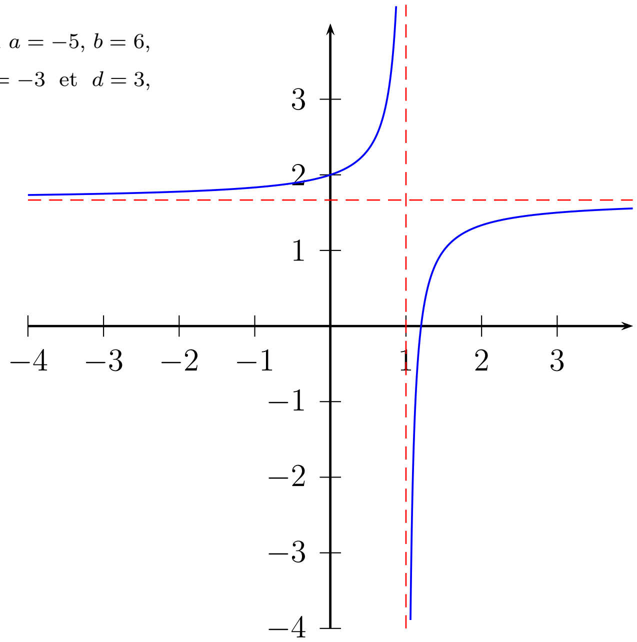
Si $V = ad - bc < 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de $\frac{ax+b}{cx+d}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

Si $V = ad - bc > 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de $\frac{ax+b}{cx+d}$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

5 - Représentation graphique

Si $V = ad - bc < 0$	Si $V = ad - bc > 0$
	

6 - Cas particulier : Fonction inverse

a - Définition :

La **fonction inverse** est une fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par l'expression suivante : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

La représentation graphique de la fonction inverse est une **hyperbole**.

Remarque : $\mathbb{R}^\star =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

b - Propriété :

La courbe représentative (l'hyperbole) de la fonction inverse admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Remarque : Étant donné que zero est exclu de l'ensemble de définition de la fonction inverse, il n'y a donc aucun pas d'abscisse 0 sur l'hyperbole.

c - Propriété :

La fonction inverse est :

— strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$.

— strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

d - Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de $f(x)=\frac{1}{x}$		$\Vert$	

e - Représentation graphique

Ci-dessous, la représentation graphique de la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$.