Généralité sur les fonctions

I- Rappels

1 - Définition

Une **fonction** est une application qui associe à tout nombre x appartenant à un ensemble D un autre nombre unique y appartenant à un ensemble A. On note :

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

On pose généralement $f(x) = y$, où

— y est l'image de x par la fonction f ;
— x est l'antécédent de y par la fonction f.

Exemple

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

L'image de 5 par la fonction g est égale à 36. En effet, $g(5) = 2 \times 5^2 - 3 \times 5 + 1 = 36$.

Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) de 1 par la fonction g on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g(x) = 1 &\iff 2x^2 - 3x + 1 = 1 \\ &\iff 2x^2 - 3x = 0 \\ &\iff x(2x - 3) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 2x - 3 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, les antécédents de 1 par la fonction g sont : 0 et $\frac{3}{2}$.

2 - Définition

L'**ensemble de définition** ou **domaine de définition** d'une fonction $f(x)$ est l'ensemble des valeurs "possibles" que la variable x est autorisée à prendre.

Exemple

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -x^2 - 5x + 8$
2. $g(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$
3. $h(x) = \dfrac{1}{3x-5}$
4. $i(x) = \sqrt{x}$
5. $j(x) = \sqrt{-x}$
6. $k(x) = \dfrac{5-x}{4}$
7. $l(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$
8. $m(x) = 4x^2 - \dfrac{2x-1}{x^2-x}$
9. $n(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{4}$

3 - Représentation graphique

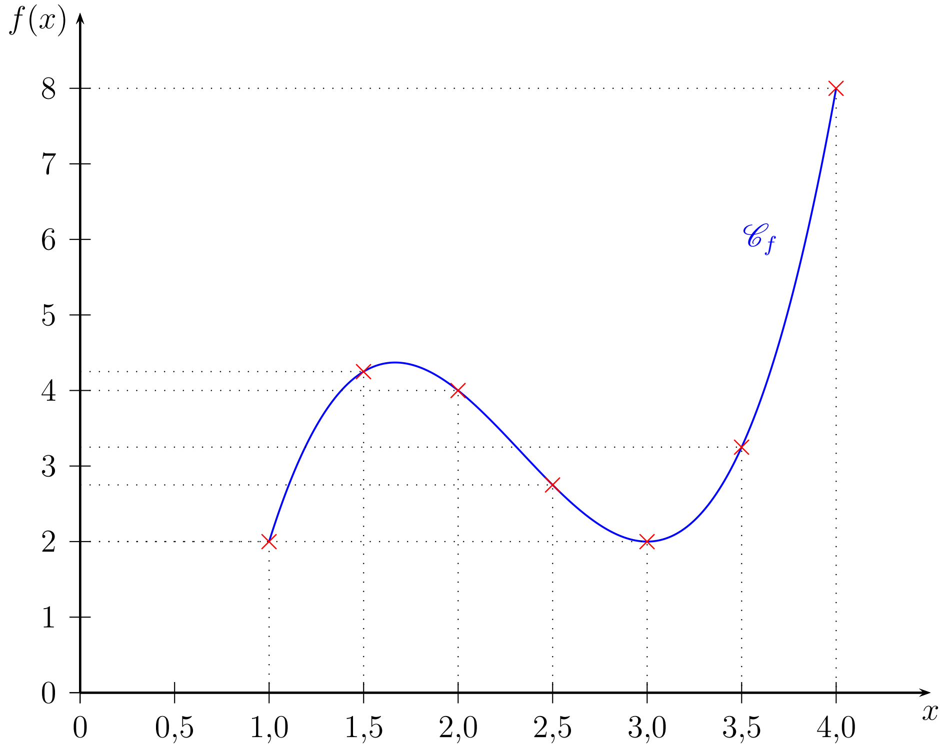
La représentation graphique d'une fonction est une image de l'ensemble des valeurs que peut prendre cette fonction.
On se place généralement dans un repère $(O\ ;\ I\ ,\ J)$ du plan où la droite horizontale (OI) est **l'axe des abscisses** et la droite verticale (OJ) est **l'axe des ordonnées**.

Exemple

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 4]$ par : $f(x) = 2x^3 - 14x^2 + 30x - 16$.
On utilise le tableau des valeurs de la fonction f pour obtenir l'allure de sa courbe.

x	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)$	2	$4,25$	4	$2,75$	2	$3,25$	8

On obtient alors, la représentation graphique, notée $\mathscr{C}_f$, de la fonction f :



On peut lire sur le graphique, ci-dessus, que l'image de 1 (voir sur l'axe des abscisses) est 2 (voir sur l'axe des ordonnées).

Le nombre 4 a trois antécédents. On peut voir que l'un des antécédents de 4 (voir l'axe des ordonnées) est 2.

4 - Sens de variation

Définitions

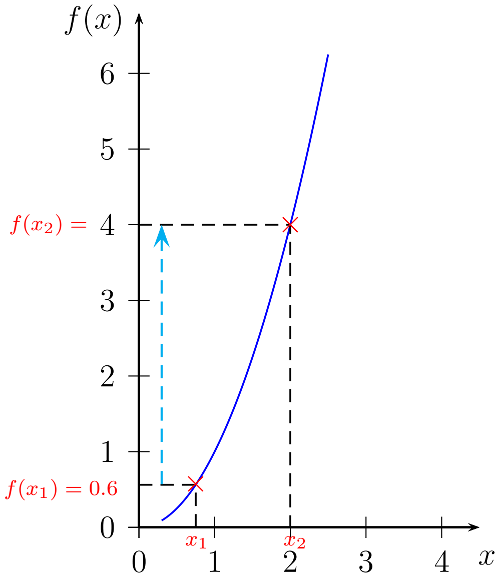
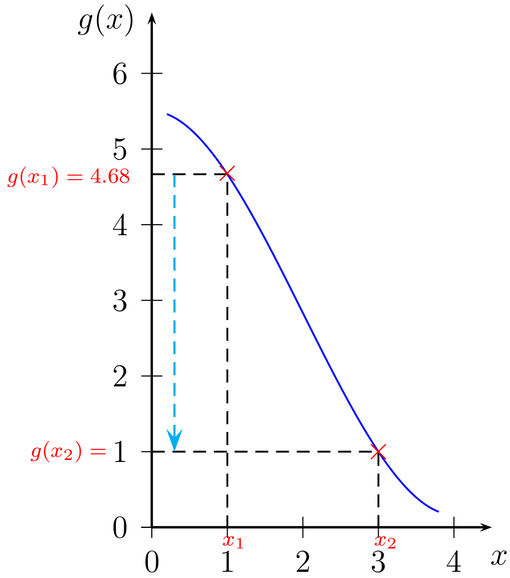
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, où $I \subseteq \mathbb{R}$.

- f est **croissante** lorsque pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \leqslant x_2$, on a : $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- f est **strictement croissante** lorsque pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$, on a : $f(x_1) < f(x_2)$.
- f est **décroissante** lorsque pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \geqslant x_2$, on a : $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
- f est **strictement décroissante** lorsque pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 > x_2$, on a : $f(x_1) > f(x_2)$.
- f est **constante** lorsque pour tout $x_1, x_2 \in I$, on a : $f(x_1) = f(x_2)$.

- f est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- f et **strictement monotone** lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple

Ci-dessous, les fonctions f et g respectivement croissante et décroissante.

Fonction croissante	*Fonction décroissante*
	

4 - Extremum

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, où $I \subseteq \mathbb{R}$.

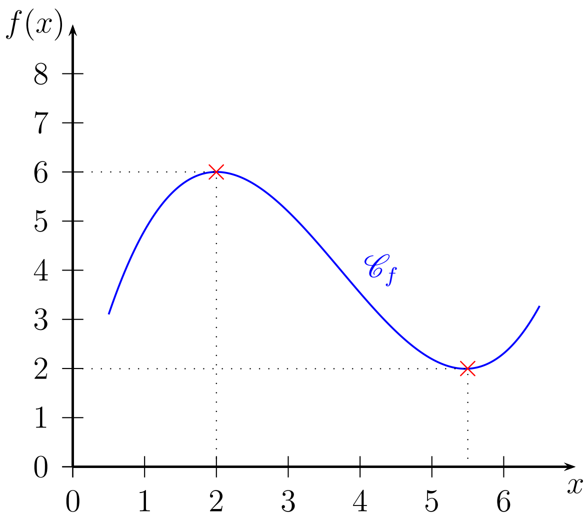
- La fonction f admet un **maximum** lorsqu'il existe un réel a tel que : $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in I$.
- La fonction f admet un **minimum** lorsqu'il existe un réel a tel que : $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in I$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 6,5]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative donnée ci-dessous.

La fonction f admet un maximum au point d'abscisse 2. Ce maximum vaut $f(2) = 6$.

Elle admet un minimum au point d'abscisse $5,5$. Ce minimum vaut $f(5,5) = 2$.



5 - Sens de variations

Étudier le **sens de variation** d'une fonction consiste à déterminer l'ensemble des intervalles où la fonction est monotone (croissante ou décroissante).
On résume généralement ces résultats dans un **tableau de variation**.

Exemple

Voici le tableau de variation de la fonction f dont la représentation graphique est donnée dans l'exemple précédent :

x	0,5	2	5,5	6,5
$f(x)$	3,1	6	2	3,2