

Systèmes d'équations

I- Équation d'une droite

1- Théorème :

Une droite (d) du plan admet une équation de la forme :

$$y = mx + p \quad \text{ou} \quad x = c$$

On parle alors d'équation réduite de la droite (d) .

2- Théorème :

- L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan vérifiant $y = mx + p$ est une droite coupant l'axe des ordonnées au point p .
- L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan vérifiant $x = c$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées et coupant l'axe des abscisses au point c .

Exemple 1

Représenter dans un repère $(O; I, J)$ les droites d'équations suivantes :

1. $y = 2x + 3$;

3. $y = \frac{1}{2}$

5. $y = -x + 4$;

2. $y = 4x$

4. $y = -2$

6. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

3- Équation d'une droite à partir des coordonnées de deux points :

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Le coefficient directeur est donné par : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

L'équation réduite de la droite (AB) est donnée par :

$$y = m(x - x_A) + y_A \quad \text{ou} \quad y = m(x - x_B) + y_B.$$

Exemple 2

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :

1. $A(2; 1)$ et $B(-1; 6)$;

2. $A(\frac{1}{2}; 5)$ et $B(0; -1)$.

Théorème 3 :

Les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur, c'est à dire $m = m'$.

Exemple 3

On donne $A(2; 4)$, $B(-1; 3)$ et $C(5; 2)$. Déterminer l'équation réduite de la droite (d) parallèle à (AB) et passant par le point C.

II- Système linéaire

Définition 1

Une équation linéaire à deux inconnues x et y est une équation de la forme : $ax + by = c$ où a , b et c sont des nombres réels.

Exemple 4

Donner l'équation réduite des équations suivantes :

$12x + 4y = 8$ et $-4x + 2y = 1$.

Définition 2

Un système d'équations linéaires à deux inconnues est de la forme
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Remarque

Résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues, c'est trouver tous les couples $(x; y)$ vérifiant en même

temps ces deux équations.

1- Interprétation géométrique d'un système à deux inconnues :

On donne le système suivantes :
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Ce système correspond aux équations de deux droites, notée (d_1) et (d_2) .

On suppose que $b \neq 0$ et $b' \neq 0$.

Cas 1 : $ab' - ba' \neq 0$

Dans ce cas, les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point S.

Les coordonnées du point S sont alors les solutions au système.

Ainsi, le système admet un couple solution unique.

Cas 2 : $ab' - ba' = 0$

Dans ce cas, il y a deux possibilités :

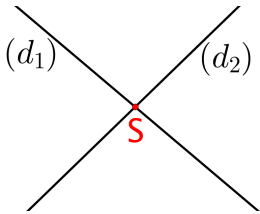
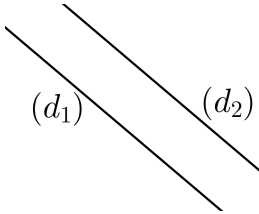
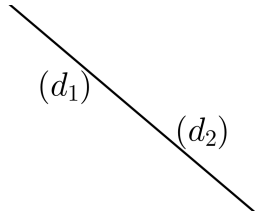
— Si $cb' \neq c'b$, les droites (d_1) et (d_2) sont strictement parallèles.

Ainsi, le système n'admet pas de solution.

— Si $cb' = c'b$, les droites (d_1) et (d_2) sont confondues.

Ainsi, le système admet une infinité de couple solution.

Résumé :

Position relative			
Condition	$ab' - ba' \neq 0$	$ab' - ba' = 0$ et $cb' \neq c'b$	$ab' - ba' = 0$ et $cb' = c'b$
Solution(s)	Une seule solution	Pas de solution	Une infinité de solution

2- Résolution algébrique d'un système à deux inconnues :

On se donne comme objectif la résolution du système suivant :
$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

a- Méthode par substitution :

On commence toujours par vérifier que le système admet bien une solution : $2 \times 1 - 3 \times 3 = -7 \neq 0$

Le système admet bien une solution.

On nomme par E_1 et E_2 les deux équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 & E_1 \\ 3x + y = 1 & E_2 \end{cases}$$

Dans E_2 : $3x + y = 1 \iff y = 1 - 3x$.

On remplace y par son expression dans l'équation E_1 :

$$\begin{aligned} 2x + 3(1 - 3x) &= -4 & \iff & 2x + 3 - 9x = -4 \\ & & \iff & -7x = -7 \\ & & \iff & x = 1 \end{aligned}$$

On remplace x par sa valeur dans E_2 : $3 \times 1 + y = 1 \implies y = -2$.
La solution du système est $(1; -2)$.

b- Méthode par addition (ou soustraction)

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 & E_1 \\ 3x + y = 1 & E_2 \end{cases}$$

On multiplie l'équation E_2 par -3 .

$$\text{On obtient alors : } \begin{cases} 2x + 3y = -4 & E_1 \\ -9x - 3y = -3 & E_2 \end{cases}$$

Ensuite, on additionne les deux équations :

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &\iff 2x + 3y + (-9x - 3y) = -4 - 3 \\ &\iff -7x = -7 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

On remplace x par sa valeur dans E_2 : $3 \times 1 + y = 1 \implies y = -2$.

La solution du système est $(1; -2)$.

Exercice d'application 1

1. Résoudre graphiquement de manière approchée, puis algébriquement de manière exacte, les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{cases} y = -0,2x - 4 \\ y = \frac{x}{5} - 6 \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x + 3y = 30 \\ x - 6y + 36 = 0 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x + 3y + 13 = 0 \end{cases} \end{array}$$

2. Résoudre algébriquement les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 3 \\ 4x - y = 2 \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} \frac{x}{3} - 2y = 1 \\ -3x + 18y = 0 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \end{array}$$

Exercice d'application 2

On considère les points $A(-3; 4)$, $B(6; 1)$, $C(-2; 1)$ et $D(0; 3)$.

- Placer ces points dans un repère orthogonal.
Le point D est-il un point de la droite (AB) ?
- La parallèle à la droite (AC) passant par D coupe (BC) en E .
 - Déterminer une équation de la droite (DE) .
 - Déterminer une équation de la droite (CB) .
 - En déduire les coordonnées du point E .