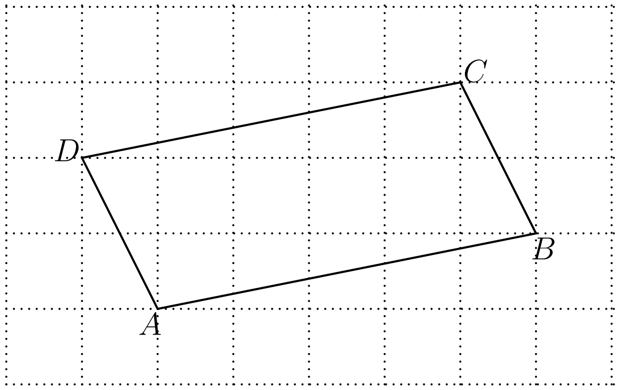
Les vecteurs du plan

1 - La translation

Définition :

La translation qui transforme un point A en un un point B est l'application qui, à chaque point D du plan, associe le point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.



2 - Caractérisation d'un vecteur

Définition

Un vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur.

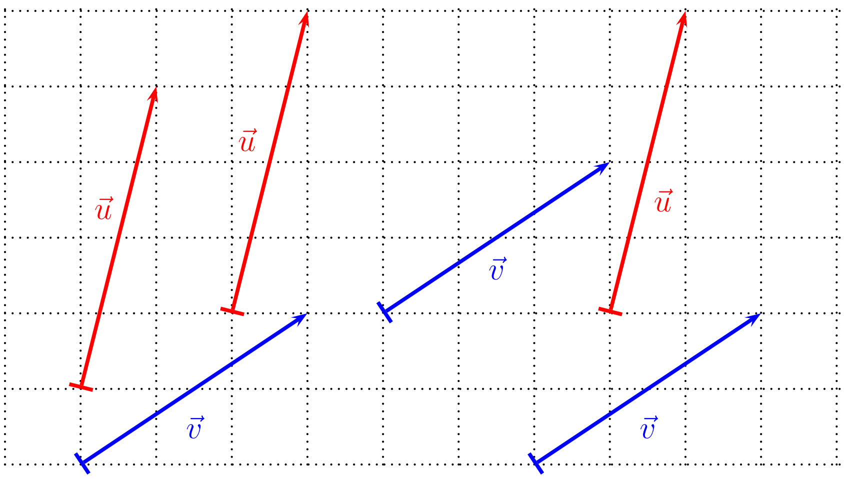
Soit A et B deux points distinct du plan. Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur défini par :
- sa direction : celle de la droite (AB),
- sons sens : de A à B,
- sa longueur (norme) : la distance AB.

Remarque : Ne pas confondre sens et direction. Une droite définit un direction et une direction possède deux sens.

3 - Représentation d'un vecteur

Un vecteur peut prendre comme origine un point quelconque du plan. Il suffit, pour cela, respecter les règle de construction d'un parallélogramme.

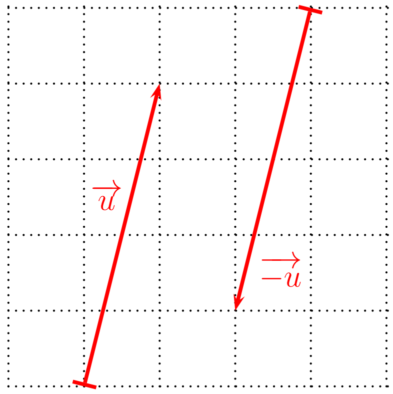
Ci-dessous, plusieurs représentations des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



4 - Vecteur opposé

Définition

On appelle opposé d'un vecteur $\vec{u}$, le vecteur $-\vec{u}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ ont la même direction, la même norme mais de sens opposé.



5 - Vecteur nul

a - Définition

On appelle vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$, un vecteur dont la norme est nulle. Ce vecteur n'a ni sens ni direction.
Par exemple $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

b - Proposition : Si $\overrightarrow{A}B = \overrightarrow{0}$, alors $A = B$. La réciproque est vraie

Cette proposition peut servir à montrer que deux points sont confondus.

6 - Propriétés

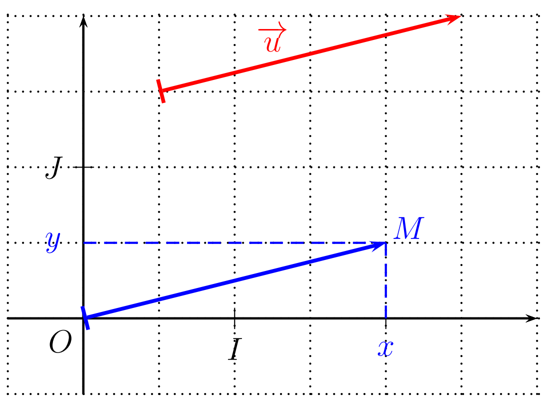
On considère quatre points A, B, C et D. Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à dire que :

a) $(AB) \,//\, (CD)$ et $AB = CD$

b) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ on le même sens. De même $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ont également le même sens.

7 - Coordonnées d'un vecteur

Soit $(O; I\ ,\ J)$ un repère du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans ce repère sont celle du point $M(x\,;\ y)$ telles que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.



Remarque : : Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont les mêmes coordonnées. La réciproque est vraie.

Théorème

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points du repère $(O; I\ ,\ J)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$.

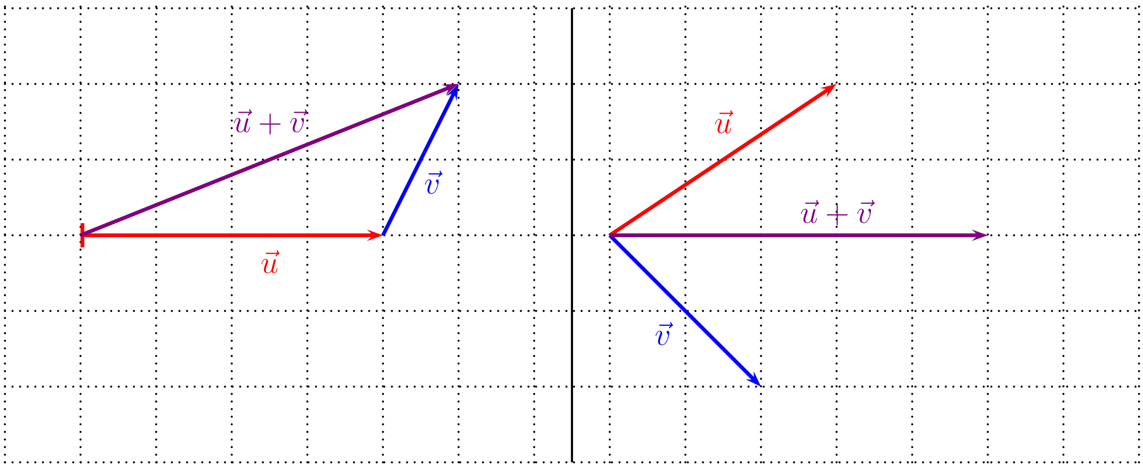
8 - Somme de deux vecteurs

a - Définition

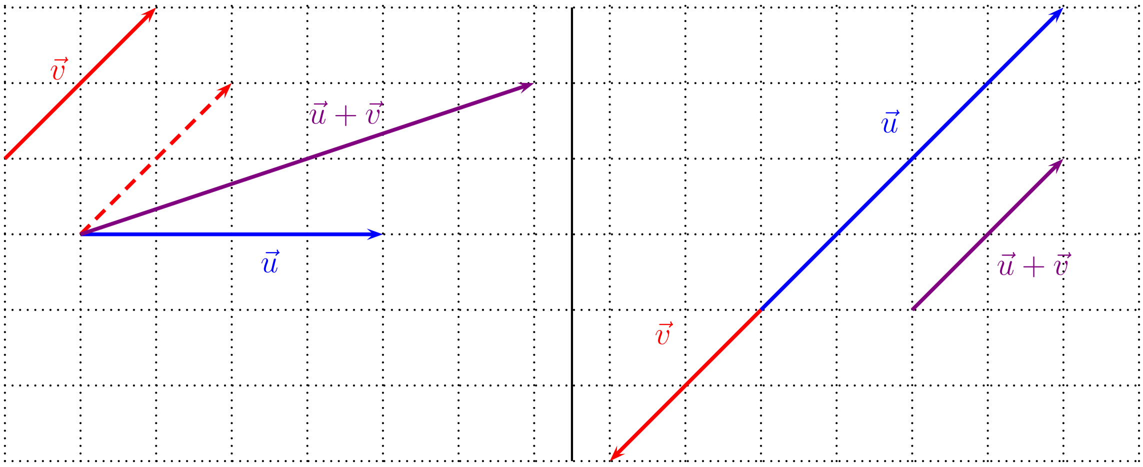
La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchainement de translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et de vecteur $\overrightarrow{v}$.

Exemples :

Cas 1 :



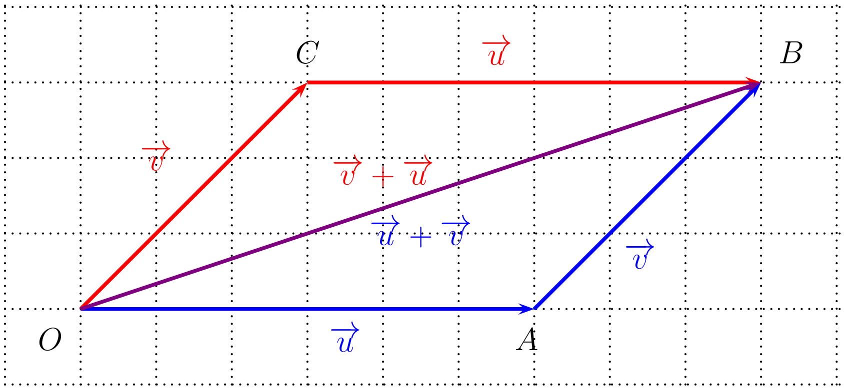
Cas 2 :



b - Propriété

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a alors :

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$$



On arrive au point B en suivant le trajet “rouge“ correspondant à $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ ainsi qu'au trajet “bleu“ correspondant à $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.

9 - Somme de plusieurs vecteurs

Théorème

Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs, on a :

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$$

Remarque :

1. Le vecteur $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}$ est obtenu en commençant par additionner $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ puis le vecteur ainsi obtenu avec $\overrightarrow{w}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$ est obtenu en commençant par additionner $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ puis le vecteur ainsi obtenu avec $\overrightarrow{u}$.

10 - Relation de Chasles

Définition

La relation $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ est appelée **relation de Chasles**.

11 - Coordonnées de la somme de deux vecteurs

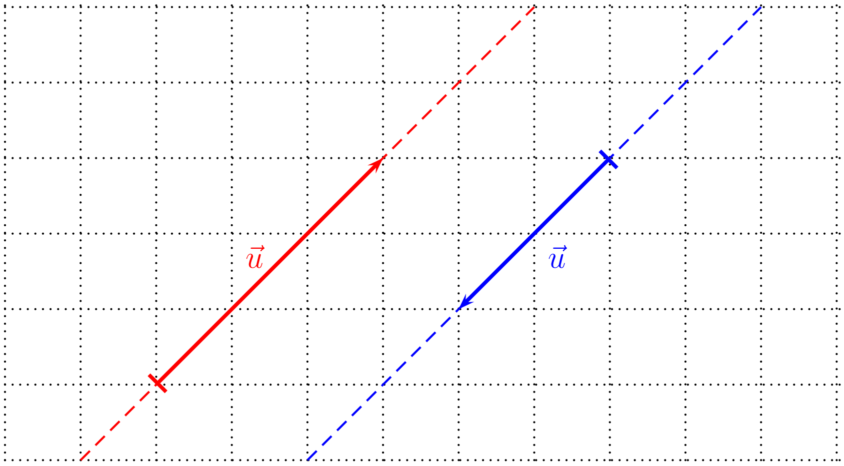
Théorème

Dans un repère $(0;\ I\ ;\ J)$, si le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(a\ ;\ b)$ et $\overrightarrow{u}'$ a pour coordonnées $(a'\ ;\ b')$, alors le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}'$ a pour coordonnées $(a+a'\ ;\ b+b')$.

12 - Produit d'un vecteur par un réel

a - Définition

Soit k un nombre réel. Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(a\ ;\ b)$ dans le repère $(O;\ I\ ;\ J)$, alors $k\,\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $(k\,a\ ;\ k\,b)$.



b - Théorème

A, B et C sont trois points tels que $A \neq B$. $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$ signifie que :

- Si $k > 0$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens et $AC = k\,AB$.
- Si $k < 0$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire et $AC = -k\,AB$.

13 - Colinéarité de deux vecteurs

a - Définition

Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b - Théorème

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs non nuls.
Dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$.

c - Traduction analytique de la colinéarité

Théorème

Dire que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}(x\ ;\ y)$ et $\overrightarrow{u}'(x'\ ;\ y')$ sont colinéaires équivaut à dire que :

$$xy' - yx' = 0.$$