Équations et inéquations

I - Les ensembles de nombres

1 - Entiers naturels :

Un entier naturel est un nombre positif qui permet de déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. On a $\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,\ldots\}$.

L'addition et le produit de deux entiers naturels sont aussi des entiers naturels. On dit alors que l'ensemble $\mathbb{N}$ est stable par addition et par multiplication. $\mathbb{N}$ n'est pas stable par soustraction. En effet, les entiers 3 et 4 sont des entiers naturels mais $3-4=-1$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$.

2 - Entier relatifs :

Un entier relatif est un entier naturel muni d'un signe positif ou négatif.
L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$. On a $\mathbb{Z} = \{\ldots\,;-3\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots\}$.
$\mathbb{Z}$ est stable par addition, soustraction et multiplication.

Les entiers naturels sont tous des entiers relatifs : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. L'inverse n'est pas toujours vrai.

3 - Nombres Décimaux :

Un nombre décimal est un nombre positif ou négatif dont une au moins de ses écritures est une fraction ayant pour dénominateur une puissance de 10. L'ensemble des décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Les entiers relatifs sont tous des nombres décimaux : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$. L'inverse n'est pas toujours vrai.

4 - Nombres rationnels :

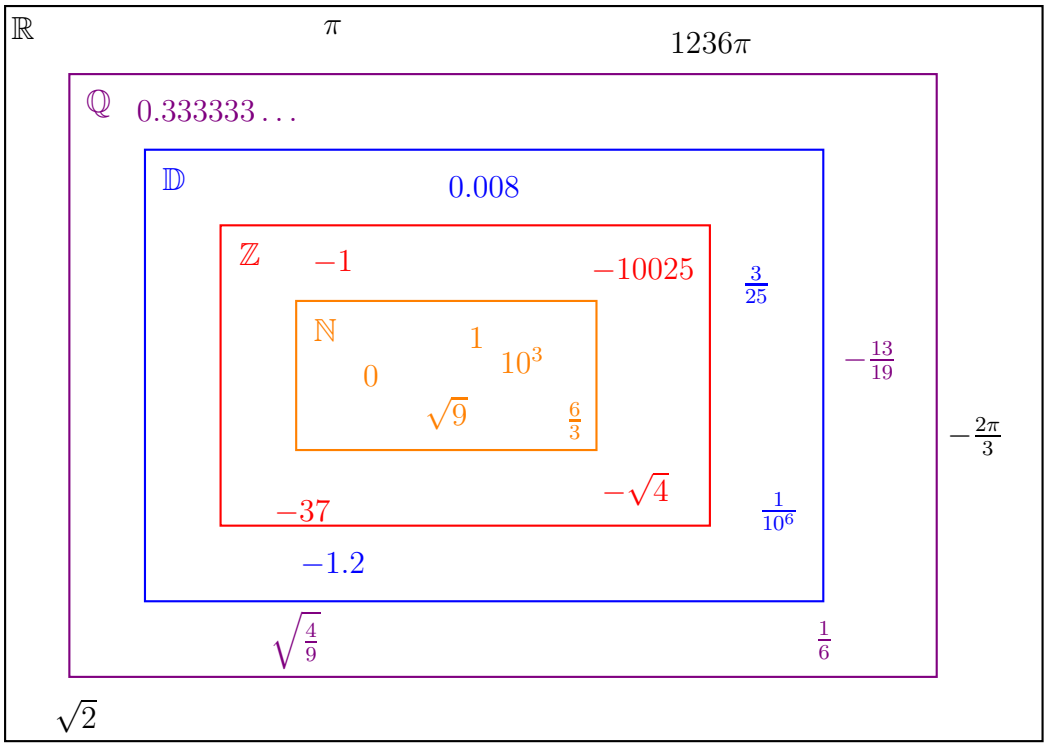
Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'exprimer comme le quotient de deux entiers relatifs, le dénominateur étant non nul. L'ensemble des nombres rationnels est noté : $\mathbb{Q}$. On a $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

5 - Nombres irrationnels :

Un nombre irrationnel est un nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction $\dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers relatifs (b est non nul). L'ensemble des nombres irrationnels est noté : $\mathbb{Q}'$.

6 - Nombres réels :

L'ensemble des nombres réel, noté $\mathbb{R}$, contient aussi bien les nombres rationnels que les nombres irrationnels. $\mathbb{R}$ contient tous les ensembles définis précédemment. Ainsi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



II - Expressions algébriques

Définitions :

- Une **expression algébrique** est une expression comprenant à la fois des nombres et des inconnues. Ces inconnues sont représentés par des lettres.
- Un **calcul algébrique** consiste à transformer une expression algébrique en une autre qui lui est égale.

III - Développement et factorisation

1 - Définitions :

- **Développer** une expression algébrique consiste à transformer un produit en une somme algébrique.
- **Factoriser** une expression algébrique consiste à transformer une somme de termes en un produit de facteurs.

2 - Distributivité :

Soit a, b, c et d quatre nombres réels.

- **Distributivité simple :** $a \times (b + c) = ab + ac$.
- **Distributivité double :** $(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$.

3 - Identités remarquables :

Soit a et b deux nombres réels. On a alors :

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

IV - Équation et inéquation :

1 - Définitions :

- Une **équation** est une égalité entre deux expressions algébriques appelées membres (ou parties) de l'équation.
- Une **inéquation** est une inégalité entre deux expressions algébriques appelées aussi membres de l'inéquation.

Résoudre une équation (ou inéquation), consiste à déterminer toutes les valeurs inconnues pour lesquelles l'égalité (ou l'inégalité) est vraie.

2 - Propriétés :

1. Lorsqu'on ajoute ou retranche un même nombre aux deux parties d'une équation (ou inéquation), on obtient une équation(ou inéquation) équivalente.
2. Lorsqu'on multiplie par un même nombre les deux parties d'une équation (ou inéquation), on obtient une équation(ou inéquation) équivalente.
3. Lorsqu'on divise par un même nombre non nul les deux parties d'une équation(ou inéquation), on obtient une équation(ou inéquation) équivalente.
4. Lorsqu'on développe, factorise ou réduit un des deux membres de l'équation(ou inéquation), on obtient une équation(ou inéquation) équivalente.

3 - Formes usuelles d'équations :

Pour résoudre une équation d'inconnue x, on se ramènera toujours à une des équations suivantes ci-dessous.
Soit a, b, c et $d \in \mathbb{R}$ avec a et $c \neq 0$.

1. **Premier degré :** $ax + b = 0 \implies$ une solution : $x = -\dfrac{b}{a}$.
2. **Fonction carrée :** $x^2 = a \implies$ deux solutions : $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.
3. **Produit nul :** $(ax + b)(cx + d) = 0 \implies$ deux solutions : $x = -\dfrac{b}{a}$ et $x = -\dfrac{d}{c}$.
4. **Quotient :** $\dfrac{ax + b}{cx + d} = 0 \implies$ une solution : $x = -\dfrac{b}{a}$.

4 - Formes usuelles d'inéquations :

a - Inéquation du premier degré :

- Résoudre une inéquation du type $ax+b \geqslant 0$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles la valeur $ax+b$ est **positive ou nulle**.
- Résoudre une inéquation du type $ax+b > 0$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles la valeur $ax+b$ est **strictement positive**.
- Résoudre une inéquation du type $ax+b \leqslant 0$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles la valeur $ax+b$ est **négative ou nulle**.
- Résoudre une inéquation du type $ax+b < 0$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles la valeur $ax+b$ est **strictement négative**.

b - Inéquation produit :

Résoudre une inéquation produit de la forme $(ax+b)(cx+d) > 0$, revient à étudier le signe de $(ax+b)(cx+d)$. Pour cela, il suffit d'étudier le signe de chacun des deux facteurs et d'appliquer la règle des signes d'un produit.

Remarque : On peut rencontrer à la place du signe $>$, les signes suivants $<$, $\geqslant$ ou $\leqslant$.

c - Inéquation quotient :

Résoudre une inéquation quotient de la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d} > 0$ revient à étudier le signe du quotient $\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Pour cela, il suffit d'étudier le signe du numérateur et du dénominateur et d'appliquer ensuite la règle des signes d'un produit.

Remarque : On peut rencontrer à la place du signe $>$, les signes suivants $<$, $\geqslant$ ou $\leqslant$.