

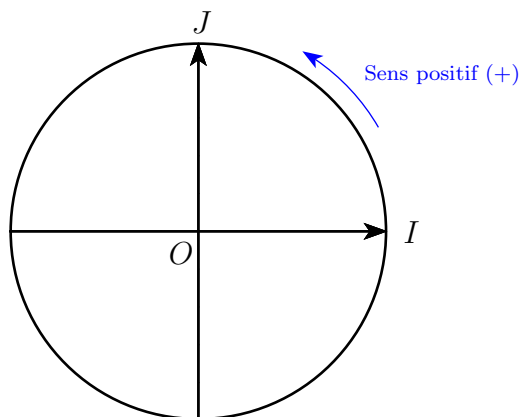
Trigonométrie

I - Cercle trigonométrique - Mesure en radian

1 - Définition : Cercle trigonométrique

On se place dans un repère orthonormé $(O; I, J)$. Un **cercle trigonométrique** est un cercle de centre O , de rayon 1 et orienté dans le sens positif ou sens direct¹.

Dans un cercle trigonométrique, le plan $(O; I, J)$ ainsi que tous les angles sont dit orientés.

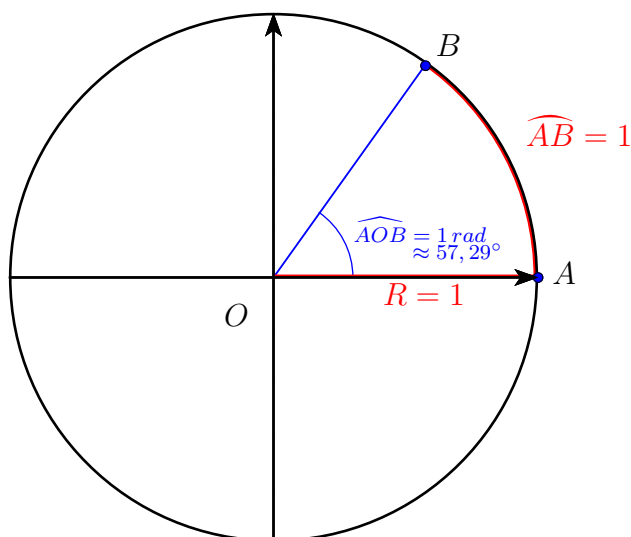


2 - Définition : Radian

Un **radian** est la mesure d'un angle au centre d'un cercle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon de ce cercle.

De façon générale, si a est la longueur d'un arc $\widehat{AB}$, la mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$ correspondant est égale au nombre a .

Illustration



1. Sens positif : sens inverse des aiguilles d'une montre ou sens habituel de dévissage

3 - Tableau de correspondance : radian - degré

On peut ainsi faire une correspondance proportionnelle entre les mesures en radians et en degrés.

Mesure en radian	360°	180°	90°	60°	45°	30°
Mesure en degré	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

On rappelle que la mesure π est le rapport (constant) entre la circonférence (ou le périmètre) d'un cercle quelconque et son diamètre.

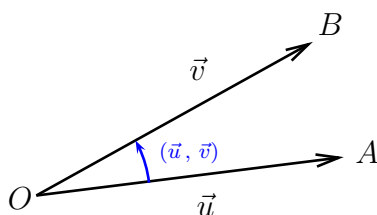
II - Angles orientés

1 - Définition : Angle orienté de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. Soit A et B deux points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Cette situation est représentée sur la figure ci-dessous.

On a alors :

- Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOA}$ ont la même mesure et sont toujours positives.
- L'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ formé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **un angle orienté** (on tourne de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$). On a ainsi l'égalité suivante : $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$.



2 - Théorème : Mesures associées à un point

Soit M un point quelconque du cercle trigonométrique tel que la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est égale à x radians.

On peut associer au point M une famille de nombres réels de la forme $x + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$, qui correspondent au même point M du cercle trigonométrique.

3 - Définition :

Soit x la mesure en radian de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère orthonormé $(O; I, J)$.

Les valeurs associées à x de la forme $x + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) sont chacune des mesures de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$

4 - Définition :

Soit x la mesure en radian de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère orthonormé $(O; I, J)$.

La **mesure principale** de l'angle orienté $(O; I, J)$ est l'unique valeur associée x de la forme $x + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) appartenant à l'intervalle $] - \pi, \pi]$.

Remarque :

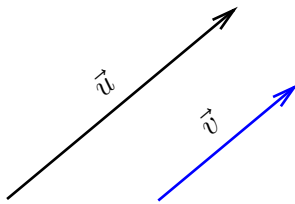
il y a d'autre notation possible de l'expression $x + 2k\pi$: x (modulo 2π), $x \pmod{2\pi}$ ou $x [2\pi]$.

5 - Propriétés des angles orientés**a - Théorème : angle de deux vecteurs colinéaires**

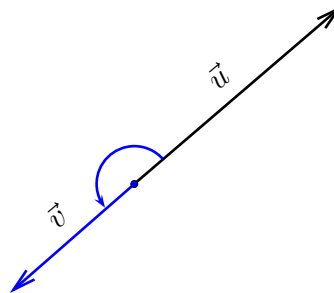
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

On a alors :

1. $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ et $(\vec{u}, -\vec{u}) = \pi$.
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si, et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
3. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire si, et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire.

b - Théorème : Relation de Chasles

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan dans un repère orthonormé direct $(O; I, J)$.

On a alors : $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$.

c - Théorème : Angles orientés et vecteurs opposés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

On a alors :

- | | |
|---|---|
| 1. $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$ | 3. $(-\vec{u}, \vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})$ |
| 2. $(\vec{u}, -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})$ | 4. $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ |

d - Théorème : Généralisation

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan dans un repère orthonormé direct $(O; I, J)$ et k et k' deux nombres réels non nuls.

On a alors :

1. Si k et k' sont de même signe, alors : $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$;
2. Si k et k' sont de signes contraires, alors : $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})$.

III - Cosinus et sinus**1- Définition :**

On se place dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ et on considère un cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1.

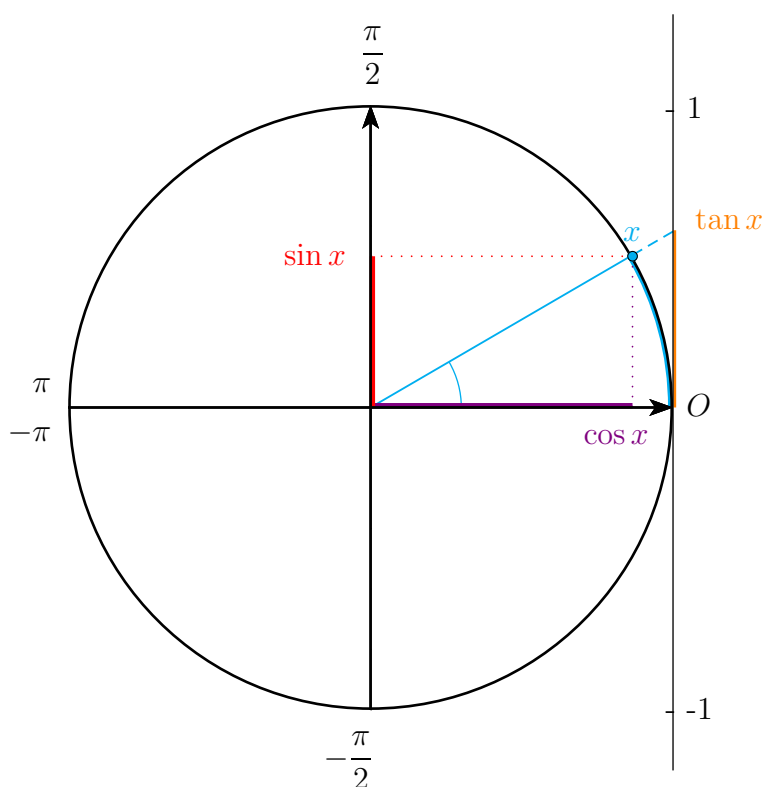
Soit M un point du cercle tel que : $(\vec{OI}, \vec{OM}) = \alpha$.

On a alors :

- Le cosinus de l'angle orienté α est égal à l'abscisse du point M dans le repère $(O; I, J)$.
- Le sinus de l'angle orienté α est égal à l'ordonnée du point M dans le repère $(O; I, J)$.

On obtient ainsi l'expression du vecteur $\vec{OM}$:

$$\vec{OM} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}$$

Illustration :

2 - Propriétés :

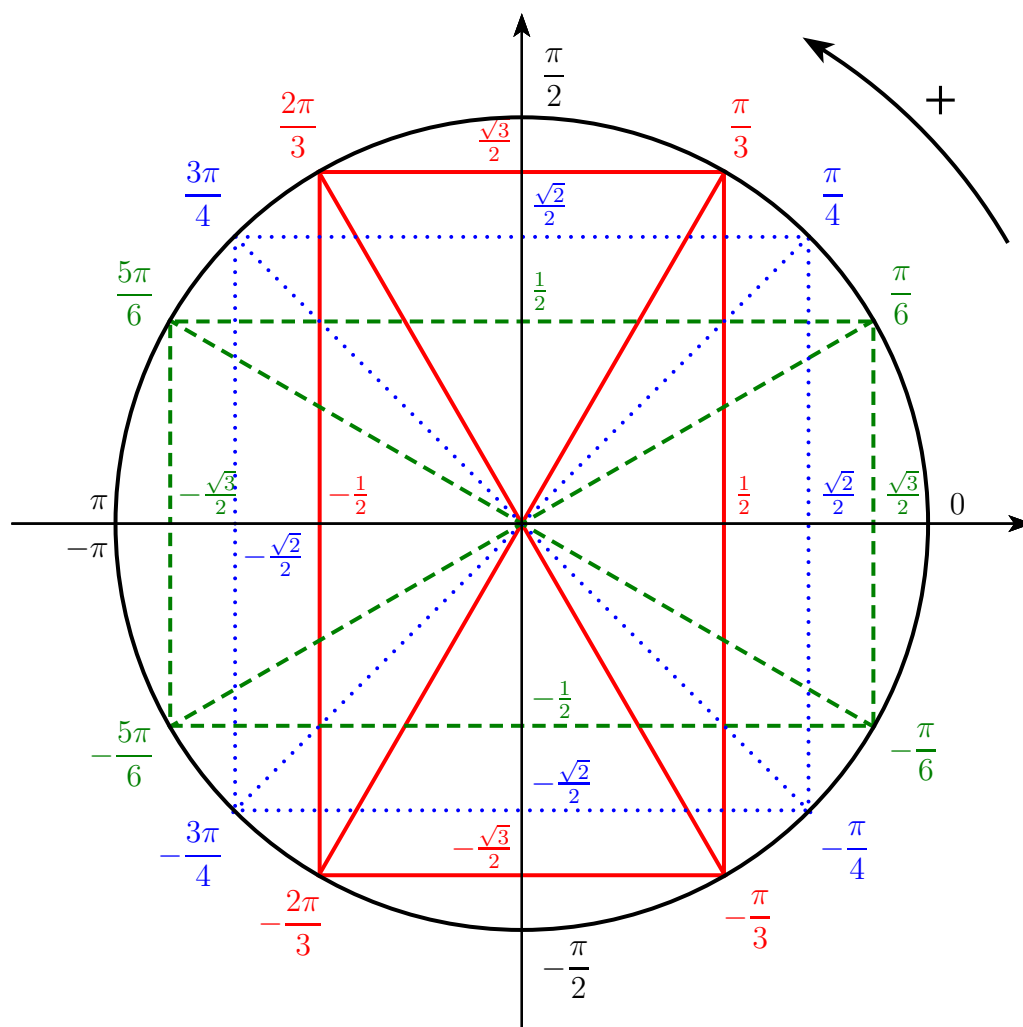
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

1. $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
3. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

3 - Valeurs remarquables :

Mesure en degré	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
$\sin x$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos x$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	0		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

On peut résumer tout ceci sur le cercle trigonométrique suivant :



4 - Formules des angles associé :

Pour tout réel x , on a :

1. $\cos(-x) = \cos(x)$

2. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$

3. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

6. $\sin(-x) = -\sin(x)$

7. $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

8. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

9. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

10. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

5 - Formules d'addition et de duplication :

Pour tout réel a et b , on a :

1. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

2. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

3. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

4. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

IV - Les équations trigonométriques**Théorèmes**

1. L'équation $\cos(x) = \cos(a)$ d'inconnue x , a pour solutions réelles :

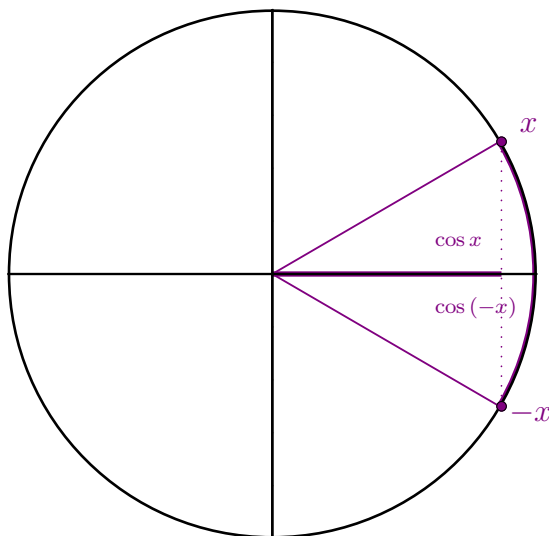
$$x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -a + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

On écrit plus simplement : $x = a [2\pi]$ ou $x = -a [2\pi]$.

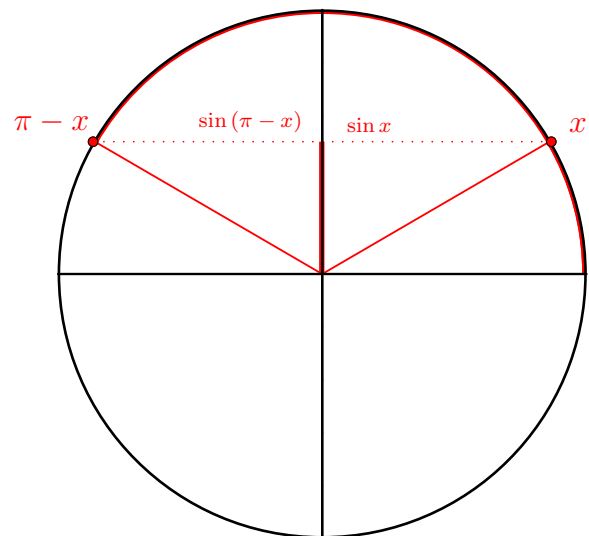
2. L'équation $\sin(x) = \sin(a)$ d'inconnue x , a pour solutions réelles :

$$x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

On écrit plus simplement : $x = a [2\pi]$ ou $x = \pi - a [2\pi]$.



Équation du type : $\cos(x) = \cos(a)$.



Équation du type : $\sin(x) = \sin(a)$.