Les suites

I- Généralité sur les suites

1 - Définition

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et à valeurs dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. On peut résumer par :

$$u \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

u_n est le terme général de la suite et n est appelé l'indice ou le rang de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Au lieu de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on notera simplement (u_n) pour désigner la suite.

Remarque :
Une suite n'est pas forcement définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ tout entier. On dit dans ce cas qu'elle est définie à partir d'un certain rang n_0. On note $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Exemples :

Calculer les cinq premiers termes des suites suites suivantes :

1. (u_n) définie par : $u_n = 2n^2 - 3$ avec $n \in \mathbb{N}$.
2. (v_n) définie par : $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 2v_n + \dfrac{3}{2}$.
3. (w_n) définie par : $w_n = \sqrt{n-3}$.

2 - Les différentes expressions d'une suites

Une suite peut être définie de deux façons différentes :

— par la forme explicite ;

— par une relation de récurrence.

a - Suite définie par une formule explicite

Lorsque la suite u_n est définie de façon explicite, on dispose d'une formule permettant de calculer directement chacun de ses termes.

Exemples :

Dans chacun des cas suivants, calculer les deux premiers termes de la suite (u_n) ainsi que u_18.

1. $u_n = 3 - 5n$, avec $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = 2n^2 - 3n + 2$, avec $n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = \frac{3n-1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^\star$

b - Suite définie par une formule de récurrence

Lorsqu'une suite est définie par une relation de récurrence, on dispose d'une relation permettant de calculer le terme de rang $n+1$ à partir de celui de rang n.
Ainsi, la suite est définie par une valeur initiale (u_0 par exemple) et une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemples :

Calculer les quatre premiers termes et le cinquième terme des suites suivantes :

1. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 4u_n - 3$.
2. On définie la suite (v_n) par : $\begin{cases} v_1 = -3 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n - \frac{2}{5} \end{cases}$.

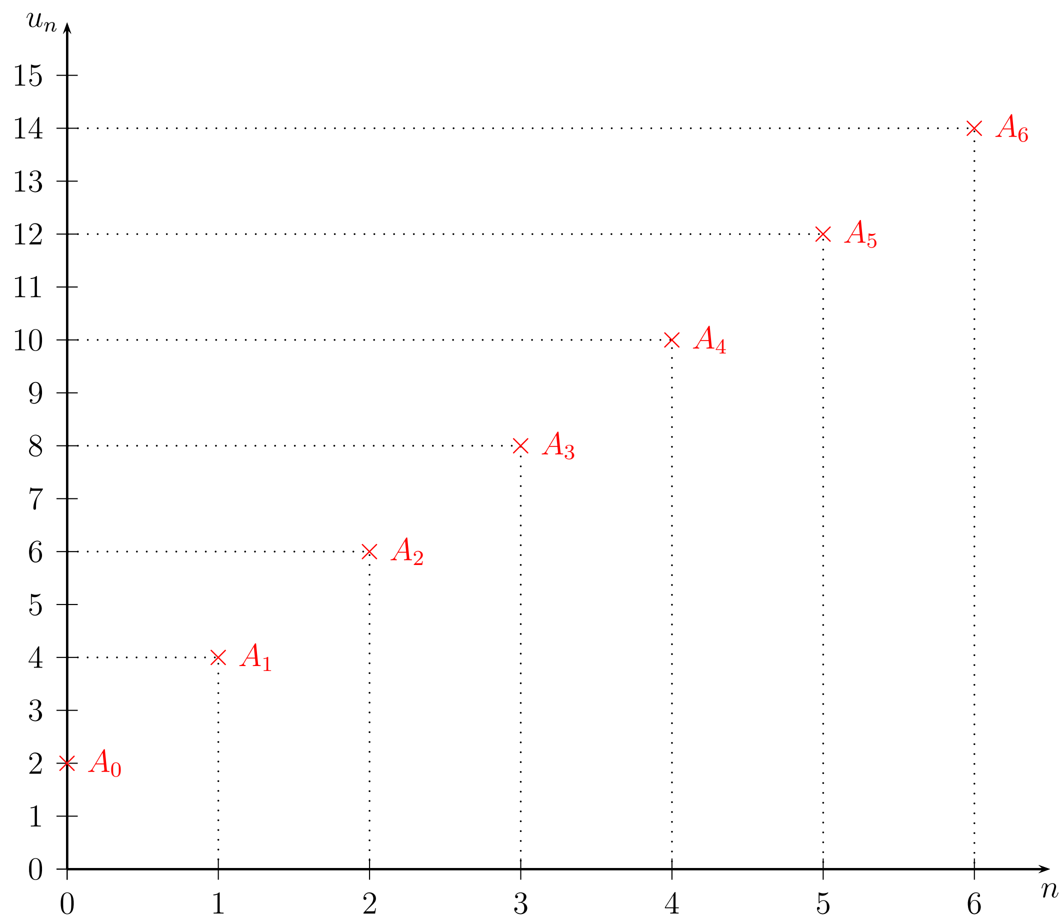
3 - Représentation graphique

Définition

Dans une repère du plan, la représentation graphique d'une suite est l'ensemble des points A_n de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

Exemple :
On définie la suite (u_n) par : $u_n = 2n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Pour représenter graphiquement la suite (u_n), on calcul les coordonnées de quelques point A_n comme dans le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	4	6	8	10	12	14



4 - Sens de variation d'une suite

1- Définition

La suite (u_n) est :
- croissante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- strictement croissante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} > u_n$;
- décroissante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- strictement décroissante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} < u_n$;
- constante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} = u_n$;
- monotone si la suite est croissante ou décroissance ;
- strictement monotone si la suite est strictement croissante ou strictement décroissance.

Exemples :

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = -8n + 2$
2. $u_n = \frac{1}{n+1}$
3. $u_n = 0,1 \times 1,2^n$

II - Lien entre suite et fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$:

a - Formule explicite :

Lorsqu'une suite est définie de façon explicite, on peut lui associer une fonction f telle que :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) \end{aligned}$$

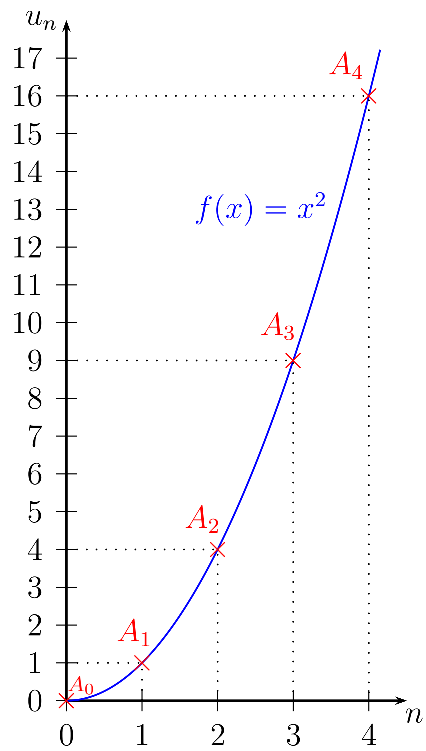
où $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$.

Exemple :

On définie la suite (u_n) par : $u_n = n^2$.
Il existe une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ tel que :
$u_n = f(n)$, avec $f(x) = x^2$.

Ainsi, $u_n = f(n) = n^2$.

La représentation graphique de la fonction f ainsi que les points A_n, où $0 \leqslant n \leqslant 4$ sont données ci-contre :



b - Formule de récurrence :

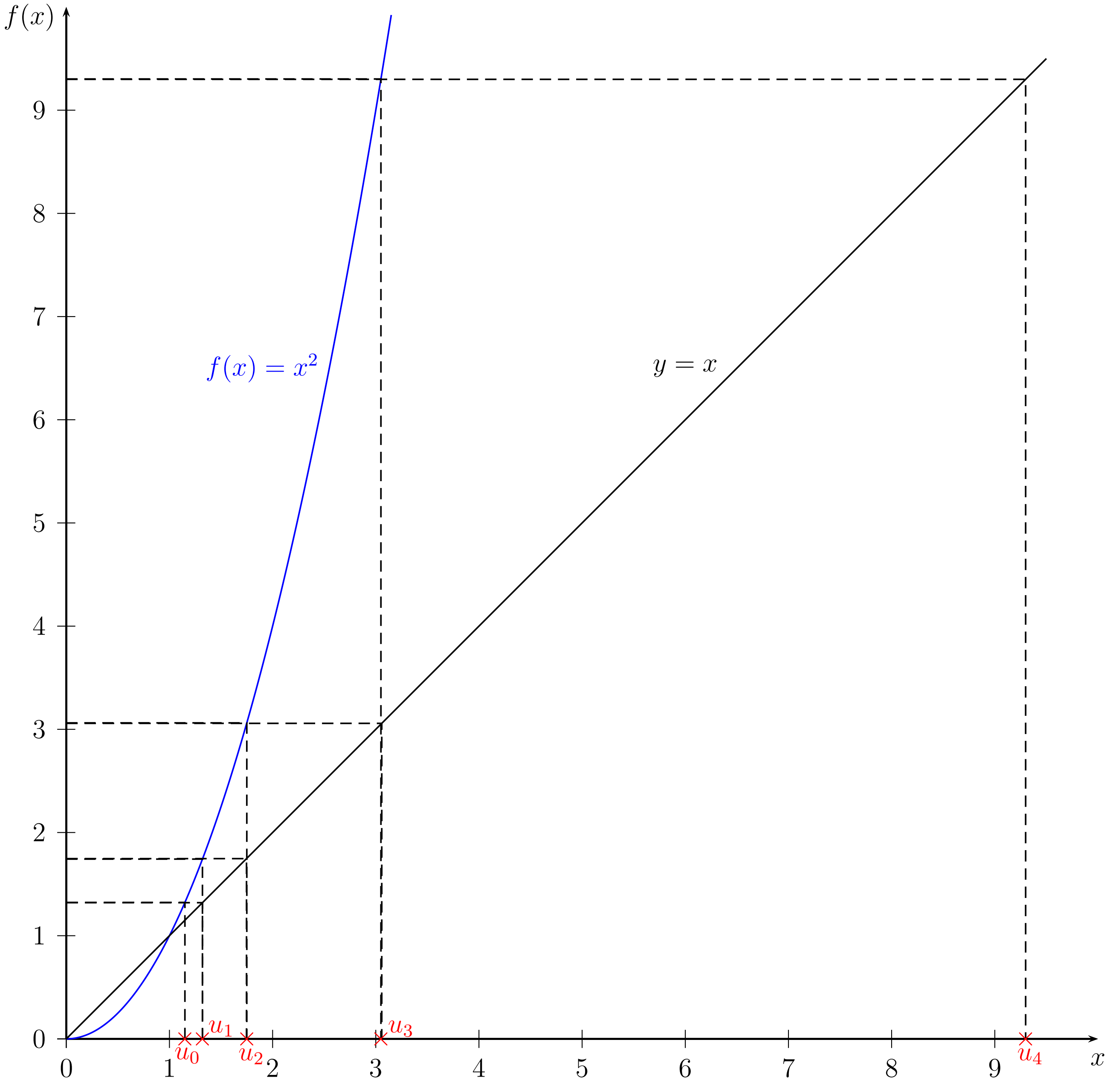
On peut également associer à une suite définie par récurrence, un fonction f telle que :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n+1 &\longmapsto u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } u_0 \text{ le terme initial.} \end{aligned}$$

où $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = u_n^2$ avec $u_0 = \dfrac{23}{20}$.
La fonction associée f est définie par : $f(x) = x^2$.
La droite d'équation $y = x$ va servir à placer les cinq premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses :



III - Suites particulières :

1 - Suite arithmétique

a - Définition

On appelle suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison $r \in \mathbb{R}$ une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

b - Propriétés

- Une suite arithmétique de raison r est croissante si sa raison est positive $r > 0$.
- Une suite arithmétique de raison r est décroissante si sa raison est négative $r < 0$.
- Une suite arithmétique de raison r est constante si sa raison est nulle $r = 0$.
- Une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison $r \in \mathbb{R}$ vérifie la relation suivante :

  $$u_n = u_0 + nr.$$

  Plus généralement, pour tous les entiers naturels n et p,

  $$u_n = u_p + (n-p)r.$$

c - Propriétés

Soit S la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme 1. On a alors :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2 - Suite géométrique

a - Définition

On appelle suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $q \in \mathbb{R}_+^\star$ une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ vérifiant pour tout entier $n \geq 0$:

$$v_{n+1} = q\, v_n$$

b - Propriétés

1. Une suite géométrique strictement positive de raison q est croissante si $q > 1$.
2. Une suite géométrique strictement positive de raison q est décroissante si $q < 1$.
3. Une suite géométrique strictement positive de raison q est constante si $q = 1$.
4. Une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $q \in \mathbb{R}_+^\star$ vérifie la relation

   $$v_n = u_0 \times q^n.$$

   Plus généralement, pour tous les entiers naturels n et p,

   $$v_n = v_p \times q^{n-p}.$$

c - Propriétés

Soit S la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de premier terme 1 et de raison $q \neq 1$. On a alors :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Remarque : Comme indiqué ci-dessus, cette formule n'est pas valable lorsque $q = 1$.

3 - Limite de suites géométriques

Propriété :

Soit q un réel. Alors :
- Si $q > 1$, alors la suite q^n a pour limite $+\infty$;
- Si $-1 < q < 1$, alors la suite q^n a pour limite 0 ;
- Si $q < -1$, alors la suite q^n n'a pas de limite.

4 - Suite arithmético-géométrique

Définition

Une suite arithmético-géométrique (u_n) est une suite définie pour tout entier n par une formule de récurrence :

$$w_{n+1} = q \times w_n + a,$$

où a et q sont deux réels et de premier terme u_{n_0}.