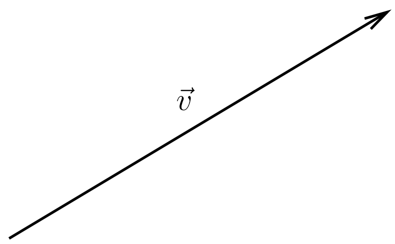
Les vecteurs

I- Les vecteurs dans le plan

1- Définition

Soit $\vec{v}$ un vecteur définit sur un plan. Le vecteur $\vec{v}$ est définit par :

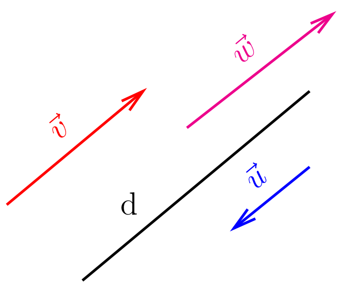
- une **direction**
- un **sens**
- une **distance**



2- Définition

On appelle vecteur directeur d'une droite d tout vecteur non nul $\vec{u}$ tel qu'il existe deux points A et B de la droite d vérifiant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Remarque :
Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs. En effet, tout vecteur (non nul) colinéaire à un vecteur directeur $\vec{u}$ d'une droite d est aussi un vecteur directeur.



3- Colinéarité et parallélisme

a- Théorème

Soient A, B, C et D quatre points du plan. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$
On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un réel λ tel que

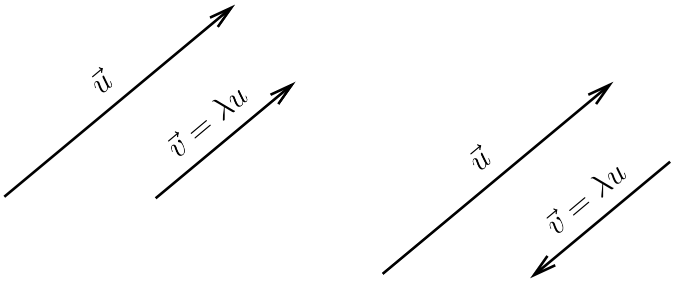
$$\vec{v} = \lambda\vec{u}$$

Remarque : On dit également que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b- Propriété

Deux vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction.

- Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ et $\lambda > 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens.
- Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ et $\lambda < 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire.



c- Vecteurs et milieu d'un segment

Dire que I est le milieu du segment $[AB]$ équivaut à dire que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

4- Relation de Chasles

Définition

Pour tous points A, B et C on a la relation suivante : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Exercice d'applications 1 :
Montrer les égalité suivantes :

$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AM} \neq \overrightarrow{CM}$

Exercice d'applications 2 :
Soient A, B et C trois points. Soit M le point défini par : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

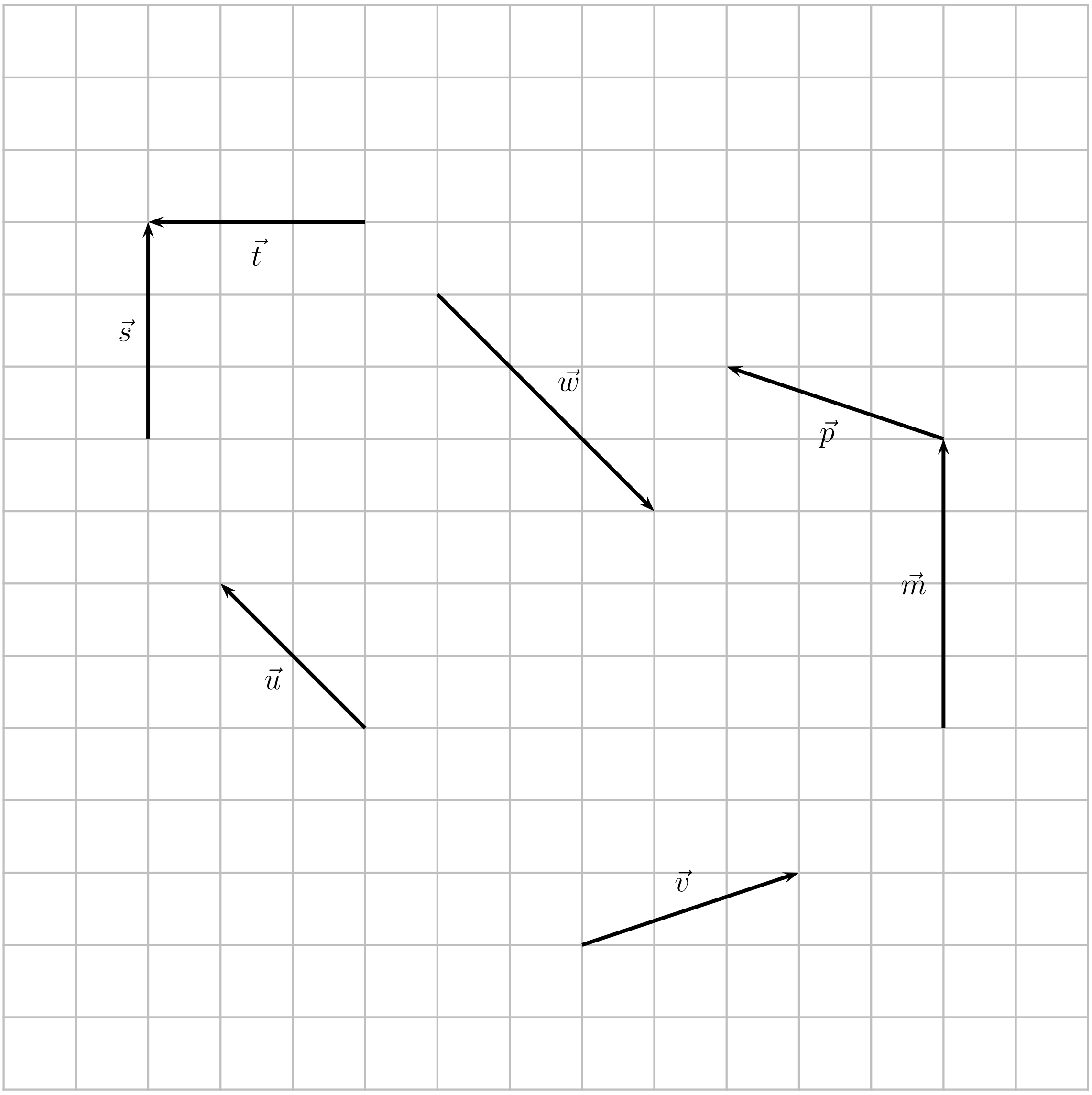
Exercice d'applications 3 :
Dans certains cas, le placement d'un point requière une transformation préalable de l'expression donnée. La question suivante illustre bien ces cas.

- Placer le point N tel que $\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{BN}$.

Exercice d'application 4 :

Représenter les vecteurs suivants à l'aide de la grille donnée sur la page suivante :

1. $\vec{u} + \vec{v}$
2. $\vec{u} - \vec{v}$
3. $\vec{u} + \vec{w}$
4. $\vec{m} + \vec{p}$
5. $\vec{m} - \vec{p}$
6. $\vec{m} + \vec{p} + \vec{v}$
7. $\vec{t} + \vec{s}$
8. $\vec{t} - \vec{s}$
9. $\vec{u} - \vec{s}$



II- Les vecteurs dans un repère cartésien

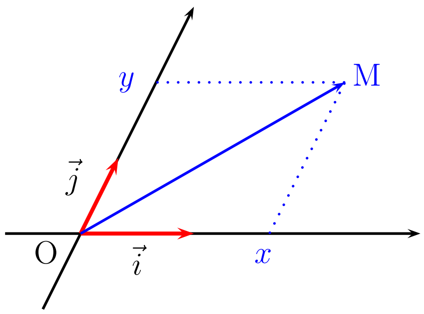
1- Propriété

a- Propriété : Décomposition d'un vecteur

On se place dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont non colinéaires.
Pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels $(x;y)$ tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
On note alors $M(x;y)$.

Les réels x et y sont respectivement l'ordonnée et l'abscisse du point M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Remarque : Le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ peut ne pas être orthonormé. Dans une base orthonormée les vecteurs de la base sont orthogonaux et normés (de norme 1).



b- Propriété :

Soit $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs du plan.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si : $xy' - yx'$.

2- Norme d'un vecteur

a- Définition

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé. On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$ et on note $||\vec{u}||$ la longueur de ce vecteur.
Si A et B sont deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors : $||\vec{u}|| = ||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

b- Propriété

— Pour tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x;y)$ dans un repère orthonormé, alors

$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

— Pour tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, on a :

$||\overrightarrow{AB}|| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

3- Équation cartésienne d'une droite

a- Propriété

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan. Toute droite (d) du plan admet une équation de la forme $ax+by+c$ où a, b et c sont trois réels avec $(a;b) \neq 0$.
D'autre part, le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

c- Définition

Toute équation de la droite de la forme $ax+by+c = 0$ où $(a;b) \neq 0$ est appelée équation cartésienne.

Exemple :

Soit (d) la droite passant par le point $A\,(2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(4;5)$.
Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) en utilisant deux approches différentes.