Probabilités

Exemple d'application 1 :
On effectue un lancer de dé à six faces, numérotées de 1 à 6. On définie les quatre événements suivants :

E_1 : "Avoir un chiffre pair"
E_2 : "Avoir un chiffre impair"
E_3 : "Avoir un chiffre supérieur ou égal à 2"
E_4 : "Avoir le chiffre 6"

1. Donner l'ensemble E des résultats possibles.
2. Expliciter les ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4.

Vocabulaire :
- **L'univers** Ω associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les éventualités qu'implique le résultat de cette expérience.
- **Un événement** est une partie de Ω composée d'un ou plusieurs éléments (ou éventualités) de cet univers.
- **Un événement élémentaire** est un événement composé d'un seul élément de Ω.
- **Un événement certain** se réalise quelque soit le résultat de l'expérience.
- **Un événement impossible** est un événement qui ne se réalise jamais.
- **L'événement contraire** de A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble de toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A.
- Deux événements A et B sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps. Par exemple, les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

1 - Probabilité :

a - Définition :
Une probabilité est une fonction P dont l'ensemble de départ est Ω et l'ensemble d'arrivé est l'intervalle $[0,1]$.

$$P \ : \ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & [0\,;\,1] \\ A & \longmapsto & P(A) \end{array}$$

b - Propriété :
On note Ω l'ensemble de toutes les éventualités et $P(A)$ la probabilité d'un événement quelconque A. On a alors :

1) $0 \leq P(A) \leq 1$;
2) $P(\Omega) = 1$;
3) $P(\emptyset) = 0$, où $\emptyset$ est la partie vide de Ω.

2 - Équiprobabilité :

a - Définition
Lors d'une expérience aléatoire, on dit qu'il y a équiprobabilité lorsque toutes les issues ont la même probabilité de se réaliser.

b - Propriété
Dans le cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est égale à : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues possibles}}$.

3 - Loi de probabilité :
Soit $E = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ un ensemble fini.
La loi de probabilité P sur l'ensemble E est la liste $(p_1, p_2, ..., p_k)$ des probabilités des éléments de E.
On a alors : $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_k = 1$, où p_i est la probabilité de l'éventualité x_i.

Remarque :
Pour facilité sa lecture, on définie généralement la loi de probabilité d'une variable à l'aide d'un tableau.

Exemple d'application 2 :
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. Définir l'ensemble Ω des éventualités et la probabilité de chacune de ces éventualités.
2. Quelle est la probabilité des événements suivants :

   - A : la carte tirée est le roi de coeur ;
   - B : la carte tirée est un as ;
   - C : la carte tirée est rouge ;
   - D : la carte tirée est un as ou une carte rouge ;

4- Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire :

Définitions :

X est une variable aléatoire définie sur E et prend les valeurs x_1, x_2, . . ., x_n. Les probabilités associées sont données dans le tableau ci-dessous :

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

— L'**espérance mathématiques** de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est le nombre réel définie par : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$.

Exemple d'application 3 :

Un supermarché distribue des tickets à ses 1 000 premiers clients. 500 tickets font gagner 10 euros, 90 tickets font gagner 20 euros, 10 tickets font gagner 50 euros et 400 tickets ne font rien gagner.

Un ticket est distribué au hasard à chaque client à la caisse et X est la variable aléatoire qui à chaque ticket associe le gain inscrit sur celui-ci.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un ticket de 20 euros ou plus.
4. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

5 - Réunion et intersection

Soient A et B deux événements d'un ensemble E.

— $A \cap B$ est l'intersection de A et B. C'est l'ensemble des événements de E qui sont à la fois dans A et dans B.
— $A \cup B$ la réunion de A et B. C'est l'ensemble des événements de E qui sont dans A ou dans B.

Remarque :

Soient A et B deux événements incompatibles de l'ensemble E. On obtient alors : $A \cap B = \emptyset$.

6 - Propriétés des probabilités :

On note A et B deux évènements.

— Si A et B sont deux événements quelconques, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
— Si A et B sont deux événements incompatibles, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
— Soit $\bar{A}$ l'événement contraire de A. On a : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

7 - Répétition d'expériences identiques et indépendantes :

a- Définition :

Lorsqu'une même expérience aléatoire est répété plusieurs fois de suite, on dit qu'il y a **répétition d'expériences identiques**.

b- Propriétés : Modélisation d'une répétition

1. Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants.
2. Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit les probabilités conditionnelles
3. La somme des probabilités inscrites sur les branches issues du même noeud est toujours égale à 1
4. Le produit des probabilités des événements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.