

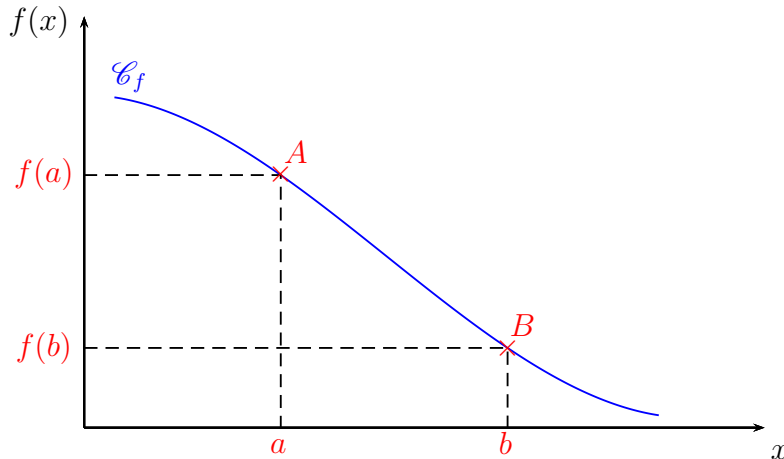
Dérivation

I- Nombre dérivé d'une fonction en un point

1 - Taux d'accroissement

Soit f la fonction définie sur un intervalle I . a et b sont deux réels distincts de I tels que $a < b$. $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f .

On note A et B deux points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b .



Définition 1 : Taux d'accroissement entre deux points

On appelle taux d'accroissement de la fonction f , entre les points a et b , le nombre : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Définition 2 : Taux d'accroissement en un point

On pose $b = a + h$, où h est un réel strictement positif.

Le taux d'accroissement de la fonction f au point a est donné par : $\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

2 - Nombre dérivé

Définition 3 :

On dit que la fonction f admet une limite l , quand x tend vers a , pour exprimer que $f(x)$ peut être aussi proche de l que possible quand x est suffisamment proche de a . On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Définition 4 :

- a) On appelle nombre dérivé de la fonction f au point a la limite, si elle existe, quand h tend vers 0, du taux d'accroissement τ_a .

Ce nombre dérivé, noté $f'(a)$, vérifie : $f'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque : On peut également utiliser l'expression suivante pour calculer le nombre dérivé :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- b) Si le nombre dérivé de f en a existe, on dit que la fonction f est dérivable en a .

3 - Équation de la tangente**Propriétés 1 :**

a) Si f est dérivable en a , alors sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(a ; f(a))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$.

b) L'équation réduite de la tangente en $A(a ; f(a))$ est donnée par : $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

4 - Fonction dérivée**Définition 5 :**

Soit f une fonction dérivable en tout point d'un intervalle I .

La fonction dérivée de f , notée f' , est la fonction qui, à tout nombre x de l'intervalle I , associe le nombre $f'(x)$.

Propriétés 2 :

Le tableau ci-dessous rassemble les formules usuelles des dérivées.

Fonction	Dérivée	Domaine de définition
$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b, \quad a \text{ et } b \in \mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leq -1$,
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$f(x) = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$

Propriétés 3 :

Soit $U(x)$ et $V(x)$ deux fonctions dérivables sur un même intervalle I .

Remarque : Par soucis de concision, on notera tout simplement U et V au lieu de $U(x)$ et $V(x)$.

- Dérivée de la somme :

La fonction $U + V$ est dérivable sur I et on a : $(U + V)' = U' + V'$.

- Dérivée du produit par un réel :

La fonction $k \times U$ est dérivable sur I et on a : $(k \times U)' = k \times U'$.

- Dérivée du produit :

La fonction $U \times V$ est dérivable sur I et on a : $(U \times V)' = U'V + UV'$.

- Dérivée de l'inverse :

Si V est non nul sur l'intervalle I , alors $\frac{1}{V}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2}$.

- Dérivée du quotient :

Si V est non nul sur l'intervalle I , alors $\frac{U}{V}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{UV' - U'V}{V^2}$.

5 - Dérivée et sens de variations

On suppose que la fonction f est dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I .

6 - Dérivée et extremums**Théorème**

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I . Soit J un intervalle ouvert inclus dans I et $x_0 \in J$.

- a) Si la fonction f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
- b) Si la fonction dérivée f' s'annule en x_0 , en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0 .

Remarque :

$f'(x_0) = 0$ ne suffit pas pour dire que $f(x_0)$ est un extremum local.

Par exemple, si $f(x) = x^3$, on a bien $f'(0) = 0$ mais f n'a pas d'extremum en 0.

