

Les fonctions trinômes du second degré

1 - Définition :

Une fonction trinôme du second degré est une fonction définie sur \mathbb{R} et qui, à tout x associe :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

2 - Définition :

Soit f une fonction trinôme définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Tout réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$ est appelé *racine* de la fonction f .

3- Forme canonique :

Soit f une fonction trinôme tel que $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

La *forme canonique* de la fonction f est égale à :

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$.

Le réel Δ est appelé le *discriminant* du trinôme f .

4 - Discriminant et résolution d'équation du second degré dans \mathbb{R} :

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans \mathbb{R} avec $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Pour résoudre une équation du second degré de la forme : $ax^2 + bx + c$, on commence par calculer le discriminant Δ et on regarde son signe :

- Si $\Delta > 0$: f admet deux racines dans \mathbb{R} :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$: f admet une seule racine (ou deux racine confondues) dans \mathbb{R} :

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$: f n'admet pas de racine dans \mathbb{R} .

5 - Factorisation :

En fonction du signe de Δ et dans certains cas, il est possible de factoriser la fonction trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

- Si $\Delta > 0$: f admet deux racines x_1 et x_2 dans \mathbb{R} et la forme factorisée est donnée par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Si $\Delta = 0$: f admet une seule racine x_0 dans \mathbb{R} et la forme factorisée est donnée par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Si $\Delta < 0$: f n'admet pas de racine dans \mathbb{R} . Alors, la factorisation dans \mathbb{R} n'est pas possible.

6 - Signe du trinôme du second degré :

Soit le trinôme f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

En fonction des différents cas suivants, le signe de f est donné dans les tableaux ci-dessous.

1^{er} cas : $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
$f(x)$	Signe de a		0	Signe de -a	0	Signe de a

2^{ème} cas : $\Delta = 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	
$f(x)$	Signe de a		0	Signe de a

3^{ème} cas : $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	

7 - Représentation graphique :



