

Généralité sur les fonctions

I- Rappels

1 - Définition

Une **fonction** est une application qui associe à tout nombre x appartenant à un ensemble D un autre nombre unique y appartenant à un ensemble A . On note :

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

On pose généralement $f(x) = y$, où

- y est l'image de x par la fonction f ;
- x est l'antécédent de y par la fonction f .

Exemple

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

L'image de 5 par la fonction g est égale à 36. En effet, $g(5) = 2 \times 5^2 - 3 \times 5 + 1 = 36$.

Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) de 1 par la fonction g on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g(x) = 1 &\iff 2x^2 - 3x + 1 = 1 \\ &\iff 2x^2 - 3x = 0 \\ &\iff x(2x - 3) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 2x - 3 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, les antécédents de 1 par la fonction g sont : 0 et $\frac{3}{2}$.

2 - Définition

L'**ensemble de définition** ou **domaine de définition** d'une fonction $f(x)$ est l'ensemble des valeurs "possibles" que la variable x est autorisée à prendre.

Exemple

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -x^2 - 5x + 8$

4. $i(x) = \sqrt{x}$

7. $l(x) = \frac{1}{2}x - 3$

2. $g(x) = \frac{x-2}{3-x}$

5. $j(x) = \sqrt{-x}$

8. $m(x) = 4x^2 - \frac{2x-1}{x^2-x}$

3. $h(x) = \frac{1}{3x-5}$

6. $k(x) = \frac{5-x}{4}$

9. $n(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{4}$

3 - Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction est une image de l'ensemble des valeurs que peut prendre cette fonction.

On se place généralement dans un repère $(O ; I, J)$ du plan où la droite horizontale (OI) est l'**axe des abscisses** et la droite verticale (OJ) est l'**axe des ordonnées**.

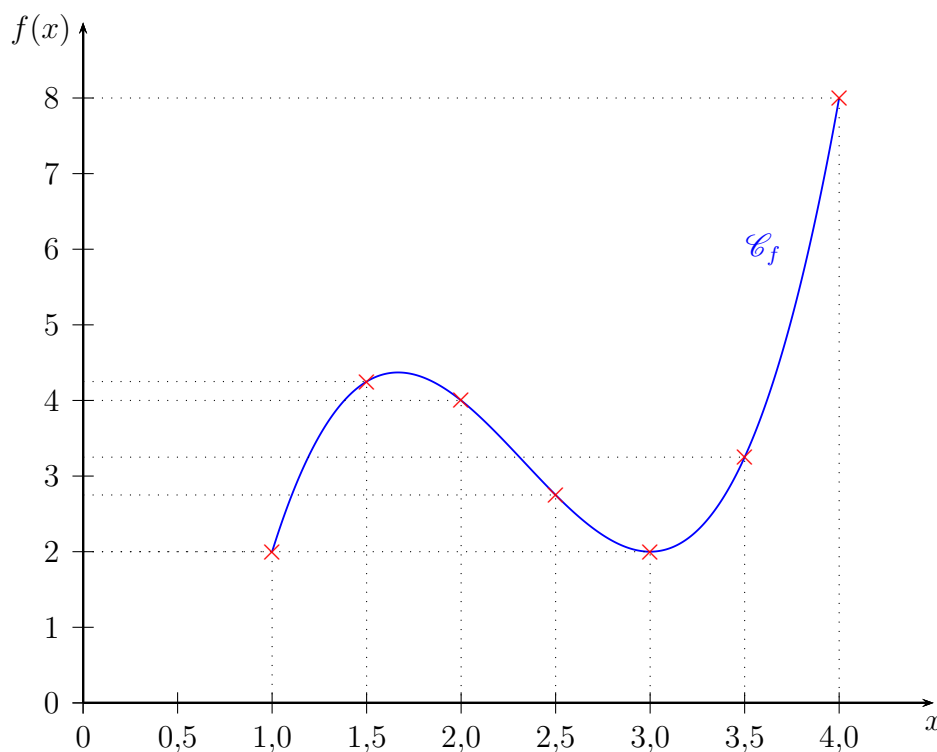
Exemple

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,5 ; 4]$ par : $f(x) = 2x^3 - 14x^2 + 30x - 16$.

On utilise le tableau des valeurs de la fonction f pour obtenir l'allure de sa courbe.

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	2	4,25	4	2,75	2	3,25	8

On obtient alors, la représentation graphique, notée $\mathcal{C}_f$, de la fonction f :



On peut lire sur le graphique, ci-dessus, que l'image de 1 (voir sur l'axe des abscisses) est 2 (voir sur l'axe des ordonnées).

Le nombre 4 a trois antécédents. On peut voir que l'un des antécédents de 4 (voir l'axe des ordonnées) est 2.

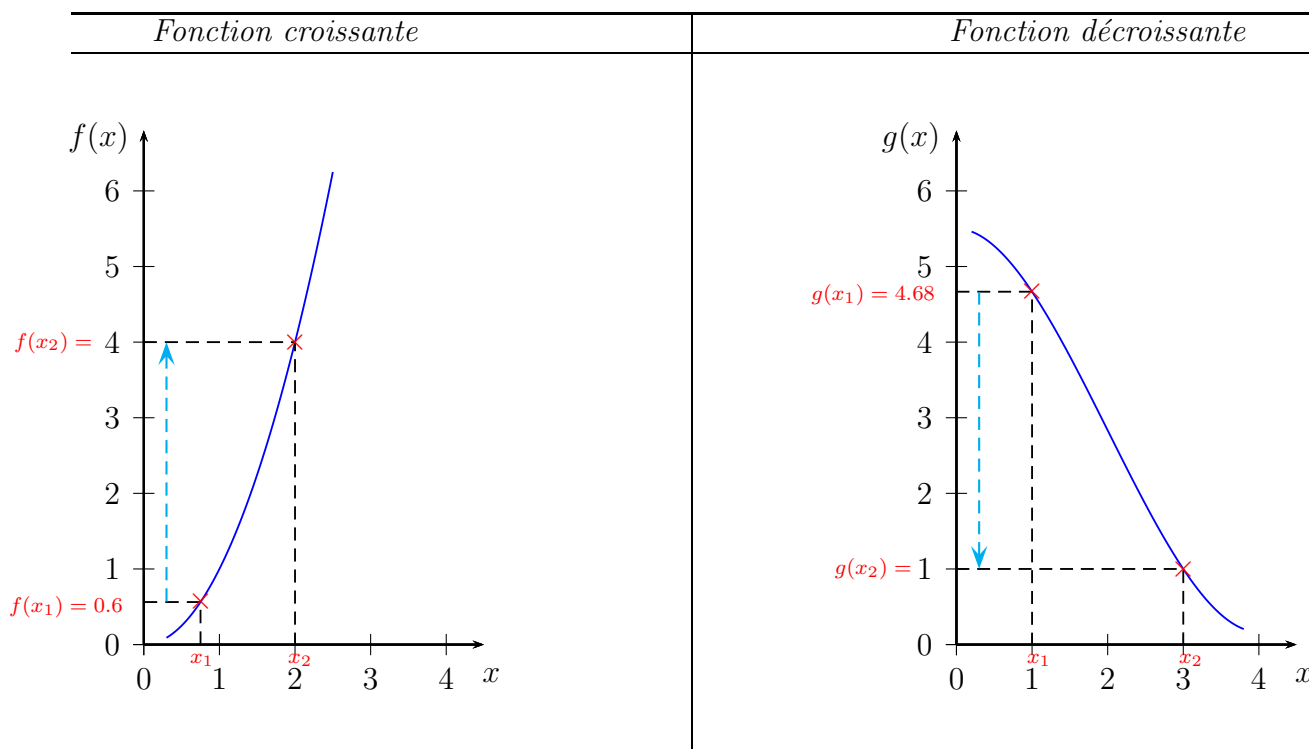
4 - Sens de variation**Définitions**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , où $I \subseteq \mathbb{R}$.

- f est **croissante** lorsque pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2$, on a : $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est **strictement croissante** lorsque pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$, on a : $f(x_1) < f(x_2)$.
- f est **décroissante** lorsque pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \geq x_2$, on a : $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f est **strictement décroissante** lorsque pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 > x_2$, on a : $f(x_1) > f(x_2)$.
- f est **constante** lorsque pour tout $x_1, x_2 \in I$, on a : $f(x_1) = f(x_2)$.
- f est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- f est **strictement monotone** lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple

Ci-dessous, les fonctions f et g respectivement croissante et décroissante.

**4 - Extremum****Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , où $I \subseteq \mathbb{R}$.

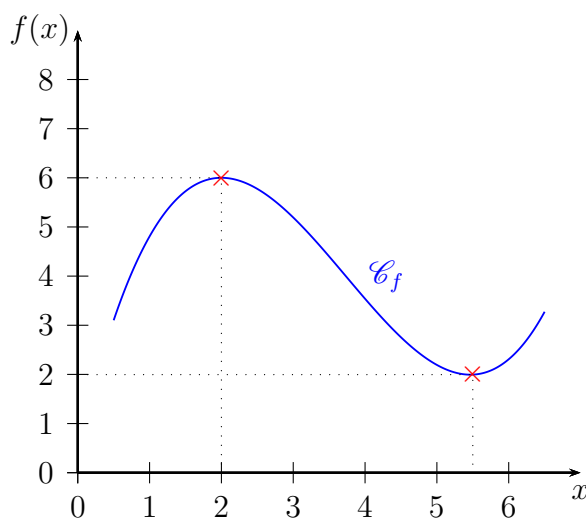
- La fonction f admet un **maximum** lorsqu'il existe un réel a tel que : $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I$.
- La fonction f admet un **minimum** lorsqu'il existe un réel a tel que : $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in I$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 5 ; 6, 5]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative donnée ci-dessous.

La fonction f admet un maximum au point d'abscisse 2. Ce maximum vaut $f(2) = 6$.

Elle admet un minimum au point d'abscisse 5,5. Ce minimum vaut $f(5,5) = 2$.



5 - Sens de variations

Étudier le **sens de variation** d'une fonction consiste à déterminer l'ensemble des intervalles où la fonction est monotone (croissante ou décroissante).

On résume généralement ces résultats dans un **tableau de variation**.

Exemple

Voici le tableau de variation de la fonction f dont la représentation graphique est donnée dans l'exemple précédent :

x	0,5	2	5,5	6,5
$f(x)$	3,1	6	2	3,2

II - Fonctions de référence