

## Pourcentage et taux d'évolution

### I- Pourcentage

#### 1- Définition :

On appelle pourcentage, la proportion d'une quantité par rapport à 100.

Soit  $t$  un nombre décimal positif. Alors  $t\%$  d'une quantité  $x$  est égale à :  $\frac{t}{100} \times x$ .

#### **Remarque :**

15% (pourcentage),  $\frac{15}{100}$  (fraction) et 0,15 (écriture décimale) sont trois façons équivalentes d'écrire un même nombre.

#### **Exemples :**

Après avoir lancé 48 fois une pièce de monnaie, on obtient 25% de pile.  
Déterminer le nombre de fois où la pièce est retombée sur le côté face.

### 2- Calcul d'un pourcentage :

#### Propriété :

Soit  $q$  et  $Q$  deux nombres réels tels que  $q$  est inférieur à  $Q$  (on note  $q < Q$ ).

Alors  $q$  représente  $(\frac{q}{Q} \times 100)\%$  de  $Q$ .

#### **Exemple :**

Dans un lycée de 600 élèves, il y a 75 filles.  
Déterminer la part de filles dans ce lycée ?

### 3- Augmentation et diminution en pourcentage :

#### Propriétés :

1. Augmenter une quantité de  $t\%$  revient à le multiplier par  $(1 + \frac{t}{100})$ .
2. Diminuer une quantité de  $t\%$  revient à le multiplier par  $(1 - \frac{t}{100})$ .

Le réel  $t$  est appelé *pourcentage d'évolution*.

$(1 + \frac{t}{100})$  et  $(1 - \frac{t}{100})$  sont appelés les coefficients multiplicateurs (notés CM dans ce cours).

Lorsque  $CM > 1$ , on observe une augmentation.

Lorsque  $CM < 1$ , on observe une diminution.

Lorsque  $CM = 1$ , le pourcentage d'évolution est nul.

#### **Démonstration des propriétés :**

Soient  $Q_0$  et  $Q_1$  deux quantités où  $Q_0$  représente la quantité initiale et  $Q_1$  la quantité finale.

1<sup>er</sup> Cas :  $Q_0$  augmente de  $t\%$  pour atteindre la quantité  $Q_1$ .

La quantité  $Q_0$  augmente de  $t\%$  équivaut à dire qu'elle augmente de  $\frac{t}{100} \times Q_0$ .

On obtient alors l'égalité suivante :  $Q_1 = Q_0 + \frac{t}{100} \times Q_0 = (1 + \frac{t}{100})Q_0$ .

Ainsi, pour obtenir la quantité finale  $Q_1$ , il suffit de multiplier la quantité initiale  $Q_0$  par  $(1 + \frac{t}{100})$ .

2<sup>ème</sup> Cas :  $Q_0$  diminue de  $t\%$  pour atteindre la quantité  $Q_1$ . (À faire en exercice).

### Exemples :

1. Jean a acheté une voiture neuve valant 15 000 euros. La première année, les modèles perdent 30% de leur valeur.  
Combien pourra-t-il espérer revendre son véhicule au bout d'un an ?
2. En 2006, le bénéfice d'une entreprise était de 100 000 euros. L'année suivante, le bénéfice a augmenté de 15%.  
Calculer le bénéfice de cette entreprise en 2007.

## II- Évolution

### 1- Taux d'évolution :

#### Définitions :

1. La variation absolue entre  $Q_0$  et  $Q_1$  est définie par :  $V_A = Q_1 - Q_0$ .
2. Le taux d'évolution (ou variation relative) entre  $Q_0$  et  $Q_1$  est défini par :  $T = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$ .

#### Propriété :

Soit  $t$  et  $T$ , respectivement, le pourcentage d'évolution et le taux d'évolution entre  $Q_0$  et  $Q_1$ .

On a alors, la relation suivante :  $T = \frac{t}{100}$ .

Il y a un lien entre le taux d'évolution, le pourcentage d'évolution et le CM :  $T = \frac{t}{100} = CM - 1$ .

#### Exemple 1 :

- Si  $CM = 1,35$  on observe alors une augmentation de 35% car :  $CM - 1 = 0,35 = \frac{35}{100}$ .
- Si  $CM = 0,25$  on observe alors une diminution de 75% car :  $CM - 1 = -0,75 = -\frac{75}{100}$ .

#### Exemple 2 :

Par lecture directe des coefficients multiplicateurs suivants, donner le taux d'évolution correspondant :

- |               |              |               |
|---------------|--------------|---------------|
| 1. CM=1,04 ;  | 4. CM=0,95 ; | 7. CM=1,057 ; |
| 2. CM=1,4 ;   | 5. CM=0,59 ; | 8. CM=2,15 ;  |
| 3. CM=1,004 ; | 6. CM=0,09 ; | 9. CM=5.      |

### 2- Évolutions successives :

#### Propriétés :

1. Si  $T_1$  et  $T_2$  sont respectivement les taux d'évolutions entre  $Q_0$  et  $Q_1$  et entre  $Q_1$  et  $Q_2$  alors :

$$Q_2 = (1 + T_1)(1 + T_2)Q_0$$

2. Si, en plus,  $T$  est le taux d'évolution entre  $Q_0$  et  $Q_2$  alors :  $1 + T = (1 + T_1)(1 + T_2)$

#### Exemple 1 :

Un vendeur décide d'augmenter ses prix de 10%. Le mois suivant, ne vendant plus rien, il décide de baisser ses prix de 10%.

1. Décrire l'évolution du prix d'un livre valant initialement 20 euros.
2. Globalement, les livres ont-ils augmenté ou baissé ? Traduire cette variation en pourcentage.

**Exemple 2 :**

Un article à 250 euros augmente de 25%, puis baisse de 20%.

1. Combien coûte-t-il finalement ?
2. Quel est le pourcentage d'évolution entre le prix initial et le prix final ?

**3- Évolution réciproque :****Définition :**

On appelle taux d'évolution réciproque entre  $Q_0$  et  $Q_1$  la valeur suivante :  $T' = \frac{Q_0 - Q_1}{Q_1}$ .

**Propriété :**

Soit  $T$  le taux d'évolution entre  $Q_0$  et  $Q_1$  et  $T'$  le taux d'évolution réciproque correspondant. On a alors l'égalité suivante :  $1 + T' = \frac{1}{1 + T}$ .

**Exemple 1 :**

Le cours d'une action augmente une première fois de 25 %. Après cette première augmentation, le cours augmente une seconde fois de 20 %.

Quel pourcentage d'augmentation le cours initial a-t-il finalement subi ?

**Exemple 2 :**

Le prix de vente d'un objet a augmenté de 28 % le 1<sup>er</sup> Juillet. Le 6 Juillet, le vendeur veut accorder à un fidèle client une réduction sur le nouveau prix de vente de telle sorte que le prix à payer par le client soit identique à celui pratiqué avant le 1<sup>er</sup> Juillet.

Quel pourcentage de réduction doit-il consentir ?

**4- Indice base 100 :****a- Définition :**

L'indice simple de la valeur  $Q_1$ , de base 100 en  $Q_0$  est le quotient suivant :  $I = 100 \times \frac{Q_1}{Q_0}$ .

**b- Propriété :**

Soit  $T$  le taux d'évolution entre  $Q_0$  et  $Q_1$  et  $I$  l'indice de la valeur  $Q_1$ , de base 100 en  $Q_0$ . On a l'égalité suivante :  $I - 100 = 100 \times T$ .

**Démonstration :**

On sait que  $T = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$  et  $I = 100 \times \frac{Q_1}{Q_0}$ . On a donc,  $T = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} = \frac{Q_1}{Q_0} - 1$ .

En multipliant chaque membre de l'égalité par 100, on obtient :  $100 \times T = 100 \times \frac{Q_1}{Q_0} - 100 = I - 100$ .

Ainsi :  $I - 100 = 100 \times T$ . Ce qu'il fallait démontrer (C.Q.F.D).

**Exercice 1 :**

Le tableau ci-dessous présente la consommation intérieure de pétrole en France (en millions de tonnes) entre 2005 et 2008. On choisit 100 pour base en 2005.

Année	2005	2006	2007	2008
Consommation	86,6	86,3	84,6	83,9
Indice	100	$I_1$		

1. Calculer l'indice  $I_1$  pour 2006. Arrondir au dixième.
2. Calculer les indices pour 2007 et 2008.
3. En déduire le taux d'évolution entre 2005 et 2007 ainsi que celui entre 2005 et 2008.